

Title	力学系におけるカオスへ至る分岐と位相構造(Dissertation_全文)
Author(s)	上江洌, 達也
Citation	Kyoto University (京都大学)
Issue Date	1983-11-24
URL	<a href="http://dx.doi.org/10.14989/doctor.k3007">http://dx.doi.org/10.14989/doctor.k3007</a>
Right	
Type	Thesis or Dissertation
Textversion	author



学位申請論文

力学系におけるカオスへ至る  
分岐と位相構造

上江列達也



# 学 位 審 査 報 告

氏 名	上 江 洸 達 也
学 位 の 種 類	理 学 博 士
学 位 記 番 号	理 博 第 号
学 位 授 与 の 日 付	昭 和 年 月 日
学 位 授 与 の 要 件	学 位 規 則 第 5 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理 学 研 究 科 物 理 学 第 一 専 攻
( 学 位 論 文 題 目 ) 力学系におけるカオスへ至る分岐と位相構造	
論 文 調 査 委 員	主 査 富 田 和 久 松 原 武 生 恒 藤 敏 彦

理 学 研 究 科

(論文内容の要旨)

小数自由度に関する常微分方程式の解が本質的な複雑化を示す‘カオス’現象を従来行なわれていない位相論的な面から記述することが本論文の目的である。

対流の模型としてモード数を3に落したローレンツ模型がカオスを示すことは著明であるが、このカオスが周期的外力に対して示す応答を詳細に調べたことがこの論文の基礎をなしている。論文内容の第1は、カオスに到る径路の分類であり、第2は、諸種の分岐に伴う軌道の位相的特徴の記述とその理解を助ける理論的考察である。

I カオスにいたる径路の研究。

上述のローレンツ模型は、

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma(x-y),$$

$$\frac{dy}{dt} = rx-y-xz, \quad (1)$$

$$\frac{dz}{dt} = xy-bz+A \cos Bt,$$

で与えられるが、解の3次元的写像表示(stroboscopy)についてA,Bのみを変化させて調べた相図はかなり複雑であり、その代りに種々の異なる型のカオスへの径路をみることが出来た。

(1) 非対称 limit cycle → 一連の倍周期分岐 → 非対称カオス → 対称カオス

この場合には2次元のHénon-Heiles系との類似が見出されている。

(2) 対称 limit cycle → homoclinic 条件 → 対称カオス(間欠性)

(3) 非対称 limit cycle → heteroclinic 条件 → 対称カオス



(間欠性)

結果として生ずるカオスは間欠的であるが、(2)、(3)の機構は、従来、間欠性発生の機構として考えられていた。saddle-node 合体の機構とは明らかに異なるものであり、申請者が新たに指摘したものである。

以上の分類に

(4) トーラス (quasiperiodicity) → カオス

の径路を加えれば、一般的に通用する径路の分類になるものと考えられる。

II 諸種の分岐に伴う流れの位相論的な性格の移行。

力学系の解の位相論的な特徴づけ自体、ある意味で前例の少ない新しい研究分野である。

この様な目的で申請者がとり上げる量として‘結び目型’と‘リンク数’とがある。

A) 1つの閉軌道の特徴づける‘結び目型’ (knot type)

B) 2つの閉軌道  $c_1, c_2$  の絡み合いを規定する‘リンク数’ (linking index)  $L(c_1, c_2)$

これは

$$L(c_1, c_2) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{c_1 c_2} \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|} \quad (\text{Gauss 方式})$$

で定義される。

次に、分岐に伴う変化を論ずるために、

$c_1$  = 着目する軌道 (不安定化の主体)  $x_0(t)$

ととり、この軌道の近傍の流れを

$$x_{i\zeta} \equiv \{ \vec{x}_0(t) + \zeta \vec{v}_i(t) ; \quad 0 \leq t \leq 2T \}$$

(ここに  $\zeta \ll 1$ ,  $\vec{v}_i(t)$  は規格化した固有ベクトル)

とすれば、 $x_0$  に対するその近傍の流れの関係は、‘ねじれ数’ (torsion number)

$$n_i = \frac{1}{2} L(x_0, x_{i\zeta}),$$

又は‘相対的ねじれ数’  $r_i$  であらわされる。

申請者は、以上の諸量を計算機を用いて徹底的に評価し、これらに基づいて分岐を通じての‘結び目型’および‘ねじれ数’の移行を詳細に求めた。

これに加えて、軌道とその近傍の位相構造の変化を簡単な仮定に基づいて扱う理論的な考察を行ない、上記のシミュレーションの結果とよく一致する結果を得たのである。

## (論文審査の結果の要旨)

力学系における解軌道の再帰的振舞が本質的に複雑化する現象としての‘カオス’は、近時、活潑な研究の対象となっているが、その研究の多くは測度論的諸量—例えば、時間変化の特徴を示す、軌道の離隔率としての Liapunov 数、エントロピーの発生率 (Kolmogorov-Sinai のエントロピー)、また不変集合の分数次元 (Hausdorff 次元)—を用いて‘カオス’を特徴づけようとするものである。

この様な事態の下において、申請者は、従来欠けていた面として、位相的側面に着目し、‘カオス’状態における軌道の形やその近傍との連結状況を位相論的に特徴づけることを行った。この着眼は、極めて新鮮であり、今後の‘カオス’の研究に対して大きな刺戟を与える先駆的な労作とみられる。

参考論文は、本論文と密接な関係があり、この方面の研究に対する申請者の温蓄を示すものである。

以上の諸点の考察により、申請者の本論文は、理学博士の学位に値するものと認める。

なお、主論文及び参考論文に報告されている研究業績を中心とし、これに関連した研究分野について試問した結果、合格と認めた。



学位申請論文

力学系におけるカオスへ至る

分岐と位相構造

上江洲 達也

## 目次

0 序章	1.
0-0. まえがき	1.
0-1 カオス, ストレンジ アトラクターの定義とその特徴	3
0-2. カオスへのルート	13
0-3. 物理系におけるカオス	19
0-4. 本研究の目的	23
第1章 カオスへのルート(強制ロ-レンツモデルを例にとり, 2)	25
1-0 モデルと相図	25
1-1. カオスへのルート	30
1-2 まとめと議論	45
第2章 3次元常微分方程式の解の位相的性質	46
2-0. 3次元空間内の閉曲線の位相的特徴づけ	46
2-1. 3次元常微分方程式の周期解の位相的諸量	51
2-2. 分岐過程における周期解の位相構造の変化	58
2-3. 倍周期分岐のカスケード現象(2 <sup>n</sup> 分岐)の領域における 周期解の位相構造の successive な変化	71
2-4 数値計算 その1(周期解領域)	78
2-5. ストレンジ アトラクターの位相的特徴づけ	84
2-6. 数値計算 その2(カオス領域)	87
2-7. オリジナル・ロ-レンツモデルの大域的な分岐過程における 位相構造の変化	95
2-8. まとめと議論	99
	102

# 附 録

A. Hénon マップと 2 次までの非線形性を持つ散逸率一定 ( $\epsilon_0$ ) の  
2 次元写像との同値性 (decouple しない場合). 103

B. 対称性のある系での対称リミットサイクルの倍周期分岐の禁止について 105

C.  $u(t)$  の連続性, 微分可能性 114

D.  $n_i - r_i + L(x_0 + \zeta' f_2, x_0)$  の言正明 117

文 献 120



0-0 ま え が き

自然現象、更には社会現象を記述する決定論的方程式、即ち、ランダムな力を仮定しない方程式 (Hamilton 方程式, Navier-Stokes 方程式等) は一般的に次のような形に書ける。

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{X}(\vec{x}(t)) \quad (0.1)$$

但し、 $\vec{x}(t)$  は問題に応じて、ユークリッド空間、バナッハ空間、ヒルベルト空間等に属するベクトルであり、 $\vec{X}$  はそこでのベクトル場である。又、

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{F}(\vec{x}_n) \quad \vec{x}_n, \vec{F} \in \mathbb{R}^n \quad (0.2)$$

という形の差分方程式で現象が記述される場合がある。このような系を総称して力学系と呼<sup>\*</sup>ぶ。このような系において、 $\vec{X}$ 、又は  $\vec{F}$  が非線形の場合、一般解を求めるのは容易なことではない。のみならず、低次元の場合でさえ、解析的でない、ストカスティックな振舞を示す解が存在する。このような解はカオスとよばれる乱流現象やエルゴード問題と関連

\* 補足すれば、(0.1)の場合、解は、初期値  $\vec{x}(0)$  と時刻  $t$  の関数として、

$\vec{x} = \vec{f}(t, \vec{x}(0))$  とかけ、これを  $\vec{X}$  によって生成される flow と呼ぶ。この写像

$\vec{f}$  のことを考えている空間上の力学系と呼ぶ。(0.2)の場合も同様。

して、極めて興味深い。

力学系におけるカオスは、保存系(位相空間内の体積が時間発展にも、変化しない系)においては Poincaré<sup>1)</sup> 以来知られている現象であり、又、散逸系においては、1963年の Lorenz<sup>2)</sup> による、いわゆるローレンツ・アトラクターの発見以来、多くの研究がなされている\* )

この章では まずカオスの定義、特徴について述べ、次に現在までに知られているカオスへのルートの種類について述べる。更に物理系におけるカオス研究について概括し、最後に本研究の目的について述べる。

\* ) 散逸系でのカオスは、Lorenz 以前に、発見されている。<sup>3)</sup>

0-1. カオス, ストレレンジ アトラクターの定義とその特徴

Li-Yorke<sup>\*)</sup> は、区間  $I = [0, 1]$  から  $I$  への連続写像  $f$  において、3 周期解が存在すれば、次の 3 つの命題が成立することを証明した。<sup>\*\*)</sup>

i) 任意の自然数  $k$  に対して、 $k$  周期点がある。

ii) 区間  $I$  に  $f$ -不変 ( $f(S) = S$ ) な非可算集合  $S$  があり、 $S$  内の任意の

点  $p, q$  に対して

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| > 0, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| = 0 \quad **)$$

iii)  $p \in S$  内の任意の点、 $q$  を周期点とすると、

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f^n(p) - f^n(q)| > 0$$

ii) は  $S$  内の任意の 2 点は、どんなに  $f$  を作用させても、離れたり、充分近づいたりすることを示しており、iii) は  $S$  内の点が周期点に収束しないことを、つまり  $S$  内の点の非周期的性質を示している。更に  $\ell$  周期点 ( $\ell \neq 2^n, n=0, 1, 2, \dots$ ) が存在すればよいという証明が Oono によって与えられている。又、高次元

\*) 実際は、もっとゆるい条件で証明されている。

\*\*)  $f^0(p) = p, f^1(p) = f(p), f^n(p) = f(f^{n-1}(p))$ 。又、 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$  は、各々

上極限及び下極限。



への拡張として、snap-back repeller が存在すればカオスになるという

証明がある。<sup>b)</sup> Li-Yorke の意味でのカオス <sup>\*</sup>i), ii), iii) を含む別のカオスの定義もなされている。<sup>7)</sup> しかし、このように定義されたカオスは、

必ずしも観測可能ではないため、Formal Chaos と呼ばれる。

カオスが観測にかかるのは (Observable Chaos)<sup>\*</sup>, ルバーク測度に関して絶対連続な不変測度を持つ場合であり、support がルバーク測度のサポート集合になる window とよばれる現象が

Formal Chaos のカテゴリーに入っている。更に、1次元写像  $f$  が

パラメータ  $\lambda$  を持つ場合、ある特殊な  $\lambda_0$  のみで絶対連続

であっても、物理的には意味がなく、 $\lambda$  の変化に対して構造安定で

なければ観測にかからないであろう。このことについては次の

\*) i) は通常 'いくらでも長い周期を持つ解がある' とおきかえられる。

\*\*) 7) では Observable Chaos を次のように定義している。 ; ルバーク測度

が正の集合  $A$  があり、 $A$  内の全ての点  $x$  に対して  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{f^k(x)} = \mu$ .

ここで  $\mu$  は正の kolmogorov エントロピー  $h(f, \mu)$  を持つ不変測度。

$\delta_y$  は  $y$  で値を持つ  $\delta$ -測度。  $h(f, \mu) > 0$  で、 $\mu$  が絶対連続なら。

この意味で Observable Chaos となる。

ように、絶対連続な不変測度の存在する  $\lambda$  の測度は以下の2つの場合、有限になることが証明されている。<sup>8)</sup>

①  $f_\lambda(x) = \lambda g(x)$   $0 \leq \lambda < 4$ ,  $g(x)$  は  $C^3$ -値相で  $x(1-x)$  に近い関数

②  $f_\lambda(x) = \lambda g(x) \pmod{1}$ ,  $g(x)$  は  $C^3$  級,  $f(0) = f(1) = 0$ ,  
かつ  $[0, 1]$  で 1つの非退化 critical point <sup>\*</sup> を持つ。

以上は、1次元写像の場合であるが、カオティックな振舞を示すには、diffeomorphism (逆が存在して,  $f, f^{-1}$ とも微分可能である写像, 以下 diffeo. と略す) なら2次元以上, flow (微分方程式 <sup>\*\*</sup> によって生成される流れ) なら3次元以上 <sup>\*\*</sup> が必要である。このような力学系の中でも、数学的には特に Axiom A を満たす力学系 <sup>9)</sup> について多くの結果が得られている。以下、これについて、簡単に説明する。

\* critical point  $\bar{x}$  とは,  $\frac{d}{dx} g(x) \Big|_{x=\bar{x}} = 0$  となる点。非退化

とは、条件  $\frac{d^2}{dx^2} g(x) \Big|_{x=\bar{x}} \neq 0$ 。

\*\* 非自律系も自律系と考えることができ、自律系として3次元以上。

flow または diffeo.  $f$  が Axiom A を満たすとは 次の 2つの条件が満足される場合である。

\*)

1) 非遊走集合  $\Omega$  は双曲的構造をもつ。

2)  $f$  の周期点全体が  $\Omega$  で稠密 (flow の場合, 平衡点は孤立)。

ここで 不変集合  $\Omega$  が双曲的構造を持つとは、大雑把に言えば、 $\Omega$  内の任意の点  $x$  で、伸びる方向と縮む方向があり、それぞれが、 $x$  を通る軌道とともに連続的に変化すること、つまり それらの次元が軌道に沿って一定であることである。この双曲的構造が、カオティックな振舞いによって決定的であり、初期値に対する敏感な依存性の原因となる。

1次元の場合と同様に、今の場合も観測可能性が物理的には、重要であるが、集合  $\Omega$  が観測されるためにはそれがアトラクターである必要がある。(アトラクターとは、その近傍の点から  $t \rightarrow \infty$  で  $\Lambda$  に近づく

\*)  $\Omega$  内の任意の点  $x$  とするとき、 $x$  の任意の近傍  $U$  と、任意の正の

定数  $\varepsilon$  に対し、 $(\bigcup_{t \geq \varepsilon} f^t(U)) \cap U \neq \emptyset$ 、つまり、どんなに

時間がたっても、もとの点の近くに、戻ってくるような点の全体。これは不変閉集合となる。



ような位相推移的不変閉集合<sup>\*)</sup>のことである。) 更にこのようなアトラクターを持つ系が構造安定である必要がある。力学系  $f$  が  $A_{\text{xiom A}}$  を満たし、更に強横断性条件<sup>\*\*)</sup> を満たせば、構造安定であることが知られている。

$A_{\text{xiom A}}$  力学系が  $C^2$  級であるとき、(ルバークの意味で) 殆んど全ての軌道はアトラクターに吸引される。更に次の量

$$P(\mu) = h(f, \mu) - \int \log J_+ d\mu \quad (***) \quad (\leq 0)$$

を最大にする  $\Lambda$  上の不変測度  $\mu^*$  が一意的に定まり、 $\mu^*$  のもとで系はエルゴード的になる。つまり、 $\Lambda$  の basin の殆んど全ての点  $x$  に対して

\*) 位相推移的 (topologically transitive) 集合  $\Lambda$  とは  $\Lambda$  内で稠密な軌道が存在する不変閉集合のこと。Axiom A の場合、非遊走集合はこのような集合 (basic set) の disjoint な和集合となる。各々の basic set はそれ以上分割できないため、basic set について議論すれば十分である。

\*\*) 任意の 2 点  $x, y$  に対して安定多様体  $W^s(x)$  と不安定多様体  $W^u(y)$  が横断的に交わる。

\*\*\*)  $J_+$  は不安定多様体の  $x$  での接空間を  $E_x^u$  としたとき  $Df|_{E_x^u} \rightarrow E_{f(x)}^u$  なる線形写像のヤコビ行列式。

任意の連続関数を  $g$  とすると

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(f(x, t)) dt = \int g d\mu$$

これは flow の場合であり, diffeo. の場合は, 積分が 和になる。

Axiom A の basic sets の 1 つ  $\Lambda$  が アトラクターであり, しかも  $E_x^u$  の次元が 0 でないと  $\Lambda$  内で複雑な振舞をする。これが ストレンジ・アトラクター (以下 S.A. と略す) の 1 つの例である。

Axiom A カ学系の例として Smale の horseshoe<sup>9)</sup> がある。図 1。

但しこの場合には, 非遊走集合は, 2 つのカントール集合の直積と, 1 つの平衡点からなり 前者は, アトラクターではない。

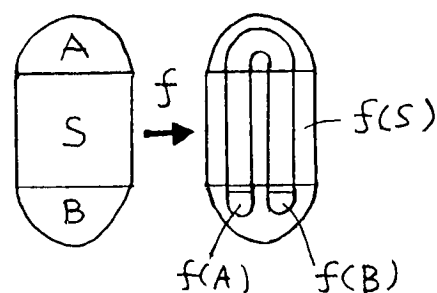


図 1

S.A. を持つ Axiom A カ学系の例としては, Solenoid がある。

これは 図 2 のように 2 次元 solid torus を 軸方向に縮め 円周方向に約 2 倍に引き伸ばして  $180^\circ$  ひねり, 半分に折, 2 枚の solid torus 内に埋め込む写像である。この写像の非遊走集合は

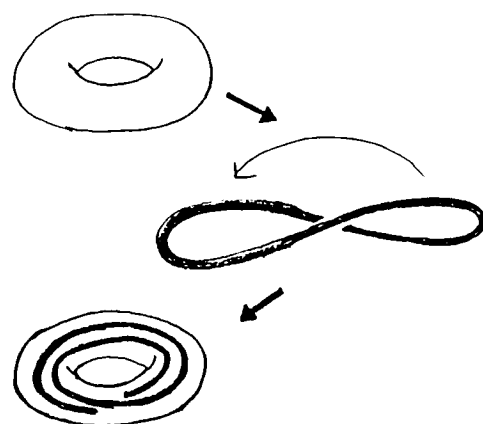


図 2

アトラクターであり (1次元集合)  $\times$  (コントロール集合) となる。

一般の力学系の場合には、S.A. の数学的に厳密な定義は、まだない。この論文では 平衡点でも、周期解でも、概周期解でもない アトラクターを、S.A. とよぶ<sup>10)</sup>。その判定基準は、第1 Lyapunov 数<sup>10)</sup> が正 (即ち、接ベクトルが長時間平均として exponential で伸びる、つまり平均としての双曲的構造をもつということ) になることである。

Axiom A でない S.A. の例としては、ローレンツ<sup>2)</sup> アトラクター<sup>2)</sup> が最も有名である。いわゆるローレンツモデルは、大気の運動を記述するため、もとの偏微分方程式 (Navier-Stokes 方程式 + 熱伝導方程式 (Bénard 問題)) で、速度場と温度場を Fourier 級数に展開して、3つのモードのみをひらいて得られた微分方程式 (0.3) である。

$$\frac{d}{dt} x = -\sigma(x - y)$$

$$\frac{d}{dt} y = rx - y - xz \quad (0.3)$$

$$\frac{d}{dt} z = xy - bz$$

ここで、 $\sigma, b, r$  はパラメーターで  $r$  は Rayleigh 数に相当する。

Lorenz は、 $\sigma=10$ ,  $b=\frac{8}{3}$ ,  $r=28$  のところで数値計算を行ない、安定な

非周期的解を見出した。図3。このアトラクターは、原点をサドルとして  
含んでおり Axiom A アトラクター ではない。アトラクター上の軌道が

$z=r-1$  なる平面を

上向きに横切る点

をプロットすると、

図4のような概略

る本の曲線が得ら

れるが、実はこれは

非可算無限個の

曲線を束ねたものとなっていて

カントールの構造を持っている。

このような構造は Solenoide

でもみられたが、又、ローレンツ

アトラクターを更にモデル化

11)

した Hénon マップ<sup>11)</sup> (0.4) (2次

元 diffeo.) の S. A (これも

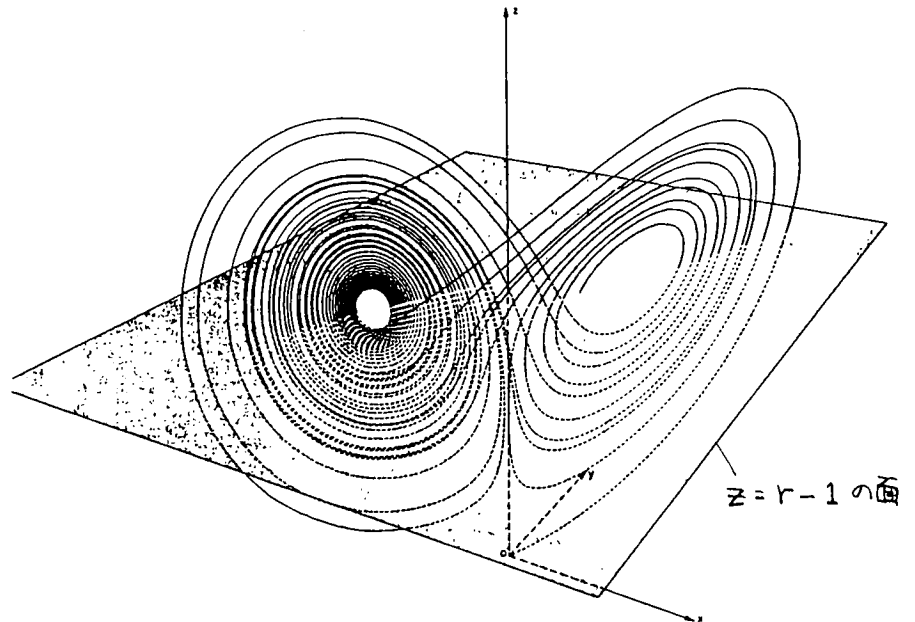


図3

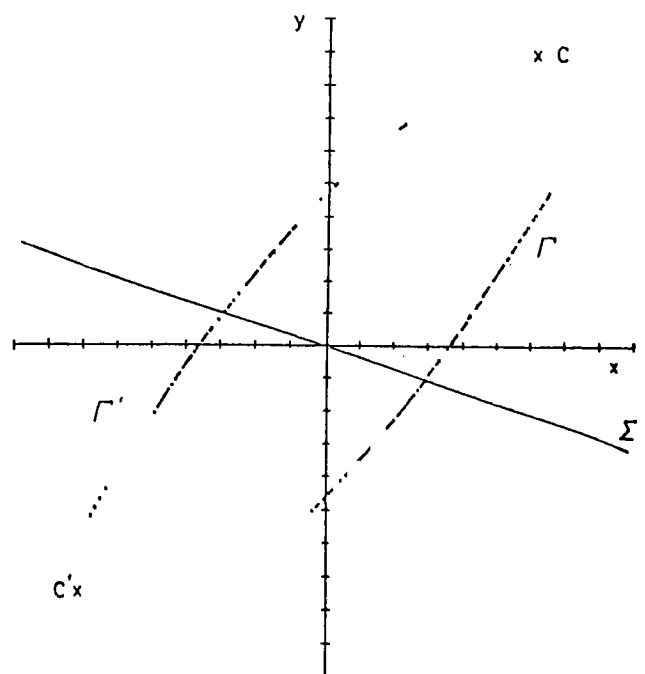


図4

Axiom A アトラクターではない)にもみられ(図5)、散逸力学系のS.A.

に共通の性質である

つまり、アトラクターが

双曲的構造を持つ

ため、任意の体積素片

はある方向には縮み、

別の方向には伸びるが

軌道が最終的には

有限領域内に閉じ

こめらるため、やがて

‘折りたたみ’が生ずる。

この機構がカントーリの

構造を作り出す。この

カントーリの構造のため、S.A.の Hausdorff 次元  $D_H$  は 整数とは

ならない。ローレンツ・アトラクターの場合は、 $D_H \approx 2.05$  と評価される。

この場合は、縮み方が激しいため カントーリの構造は殆んど、みる

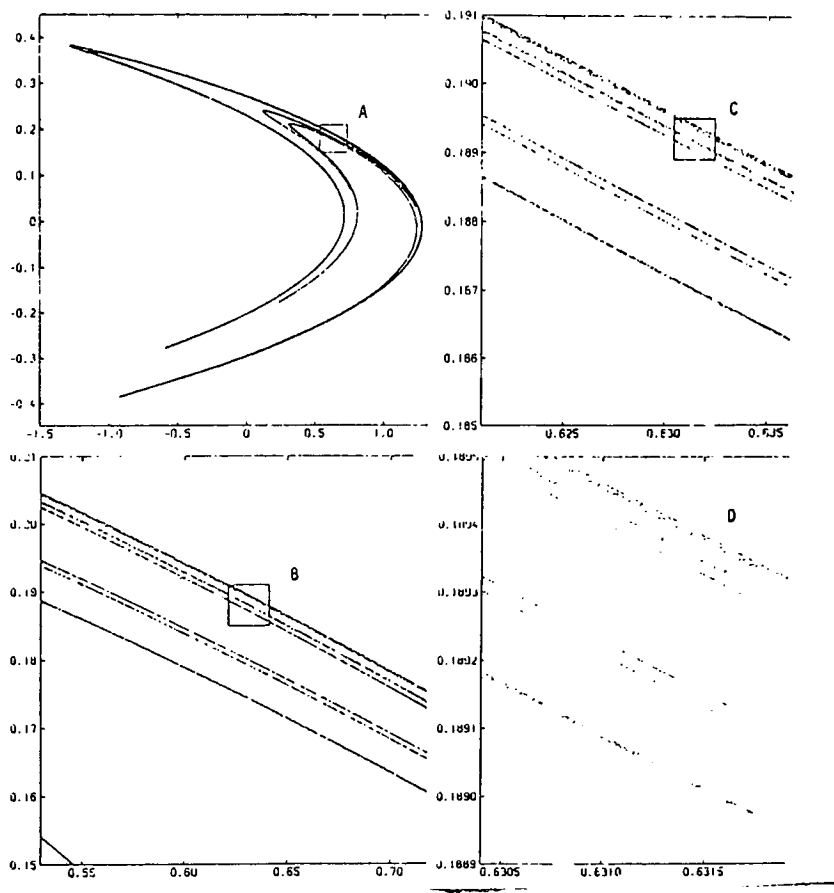


図5 横軸  $x_n$ , 縦軸  $y_n$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 + y_n - ax_n^2 \\ y_{n+1} &= bx_n \end{aligned} \quad (0.4)$$

Hénon アトラクター  $a=1.4, b=0.3$

B: A×15(倍率), C: B×10, D: C×10

12)

13)



ことが<sup>1)</sup>できず  $D_H$  も 2 に近い。従って、更に 1 次元写像によってよく近似される。連続する、座標の最大値 ( $M_n, M_{n+1}$ ) をグラフに書くと (ローレンツ・プロット), 図 6 の如く殆んど曲線上にのりことがわかる。これは、とりもなおさず、運動の決定論的性格をあらわしている。

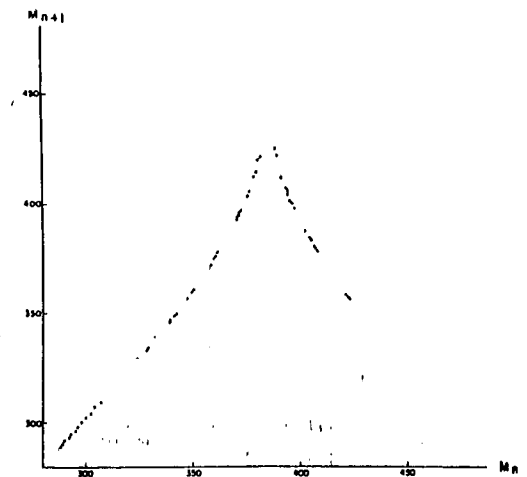


図 6  
ローレンツ・プロット

カオスのもう 1 つの特徴は、  
ホモクリニック構造<sup>1)</sup> である。

サドル的周期点の安定多様体と不安定多様体<sup>\*)</sup>が交わる点を

homoclinic point と呼ぶ。特に、横断的に交わる場合を

transversal homoclinic point と呼ぶ、この場合は horseshoe 的

構造の存在が示せ、horseshoe なら、任意に長い周期の存在等が

証明できる。Hénon アトラクター等はサドルの不安定多様体の閉包と

考えられている。

\*) 1 個存在すれば無限個存在する。

## 0-2. カオスへのルート

カオスへのルートとしては、以下の3つを挙げることができる。

1)  $2^n$  分岐の集積

2) Intermittency

3) トーラス  $\rightarrow$  カオス

これらについて簡単に説明する。

1) は M.J. Feigenbaum<sup>14)</sup> の発見によるものである。彼は適当な条件を満たす1次元写像  $x_{n+1} = f(x_n, \lambda) = \lambda g(x_n)$  においてパラメータ  $\lambda$  の値を変化させることにより、1つの周期解が不安定化して、新たに周期が2倍の周期解が生成され、それが更に不安定化して、その2倍の周期の周期解が生成され、... という現象 —  $2^n$  分岐 — を見出した。

そして、繰り込み群の手法を用いて理論的解析を行ない、 $2^k$  周期解

が最も安定になるパラメータを  $\lambda_k$  とするとき、 $\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{k-1} - \lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k+1}} = 4.669...$ <sup>\*</sup>

となることを説明した。彼の議論は写像  $f^{2^{k-1}}(x, \lambda_k)$  と  $f^{2^k}(x, \lambda_{k+1})$

の  $x = \bar{x}$  のまわりの漸近的相似則、即ち適当に scale した関数

<sup>\*</sup>) 頂点のベキ  $2$  が  $2$  の場合。

が  $k \rightarrow \infty$  で universal function に収束すること<sup>\*</sup>を仮定するが、これは数学的には未だ証明されていない。Logistic モデル  $x_{n+1} = \lambda x_n(1-x_n)$  を例にとると、 $x = \frac{1}{2}$  で関数値は最大になるが (critical point  $x = \frac{1}{2}$ )、 $2^k$  周期解の安定領域で、 $f^{2^k}(\frac{1}{2}, \lambda)$  が  $\lambda$  の単調関数であることが証明されていないため、無限に分岐が続くかどうかは明らかでない。

<sup>\*\*</sup>) Feigenbaum は 1次元写像を扱ったが、高次元系の場合も、ある条件のもとで、1次元の場合の  $\delta$  の存在を仮定して、同じ結論になることが示されている。<sup>16)</sup> 更に <sup>17)</sup> ハワースペクトルについての議論や <sup>18)</sup> ハワースター依存性を含めた理論もある。又、実験的には振動磁場中の <sup>19)</sup> 微小磁石や種々の流体で <sup>20)</sup>  $\delta$  の測定がなされている。 $2^n$  分岐の集積後はカオスになると期待されるが証明は未だない。

以上は、散逸系の場合であったが保存系の場合に同様な現象が存在し、<sup>21)</sup>  $\delta_c \approx 8.721$  なる値が得られている。

<sup>\*</sup>) スケール因子  $\alpha$  としては、 $\infty$  の場合  $\alpha = -2.502 \dots$  なる値が得られている。

<sup>\*\*</sup>)  $f(x) = 1 - a|x|^{1+\varepsilon}$  ( $\varepsilon \ll 1$ ) については証明がある。<sup>15)</sup>

2) は Manneville と Pomeau <sup>22)</sup> により議論された。これは 層流状態の後に burst が不規則に生ずる現象で、これについても繰り込み群によるアプローチがなされている。<sup>23)</sup> 第1章でこの現象に関連した議論を行なう。

3) には、無限回の分岐を経てカオスに至るという立場と、有限回の分岐でよいとする立場がある。Landou, Hopf <sup>24)</sup> は 層流から乱流への遷移過程を次のように考えた。即ち、次々に Hopf 分岐が生ずることによって多重周期運動が生成され、system の自由度がパラメータの変化とともに増大していく。そして、遂に自由度が無限になる、極限の状態が乱流状態であるとするのである。これに対して、Ruelle と Takens <sup>25)</sup> は Hopf 分岐が3度おこれば、乱流状態が可能であると主張した。正確に述べれば、3次元トーラス  $T^3$  上の constant flow は、その任意の  $C^2$ -近傍に、Axiom A を満たして、S.A. を持つベクトル場が存在するということを証明したのである。しかしながら、このことは必ずしも  $T^3$  上の概周期運動 (以下 Q.P.M. (Quasi Periodic Motion) と略す) が摂動に対して、安定でないということを意味するのでなく、

$C^2$ 位相で, 3-dim. Q.P.M. の近くに スレンジ Axiom A フラクターがある  
事を言っただけであり, 関数空間の中で S.A. を示すバクトル場がどれ  
ほどの広がりを持つているのかは明らかでない。実際, 安定性は, 関数  
空間への位相の入れ方に依存しており,  $A$  Itô<sup>26)</sup> によつて,  $\epsilon f (f \in C^\infty)$   
の形の摂動が  $k$ 次元トラス上の constant flow に  $C^{k+1}$ 位相で近  
ければ, それに対しては,  $k$ -dim. Q.P.M. は安定であるという結果が  
得られている。この問題に対しては未だ最終的結論は得られて  
いないようである。実験的に安定な 3-dim. Q.P.M. を見出したという報告  
はある。<sup>27)</sup> 又, 常微分方程式や偏微分方程式の数値計算においても  
見出されている。2次元写像では, 1個のパラメーターを変化させて, トラス  
の分岐を追いかけていくと, 実に複雑な分岐を行ない, 又, 微細構造  
が多様であるが, パラメーターを2つに増やして分岐を考えると, 統一的理解  
が得られるという報告がある。<sup>29)</sup>

保存系, 特に Hamilton 系の場合は 系の完全可積分性と関連して  
多くの研究がなされている。完全可積分な系に小さな摂動を加えると,

\*) このような形の摂動が物理的にはもっともらしいとの理由で, 彼は  
この形を採用している。

30)

K.A.M. の定理によつて, 無理数の winding number  $w$  のトーラスは, 摂動が<sup>\*)</sup>

小さいときは, その殆んどが<sup>\*\*)</sup>壊れずに残るが, Poincaré - Birkhoff の定理

によつて,  $w$  が有理数のトーラスは, resonance をおこして壊れ, elliptic な

周期点と, hyperbolic な周期点の二つになつてしまう。<sup>31)</sup> この両者をつなぐ

細かい層 (stochastic layer) では ストカスティックな振舞がみられる。<sup>32)</sup>

これは, homoclinic point の生成に帰因する。摂動を大きくしていくと,

壊れるトーラスが増え, 又 stochastic layer の領域も大きくなっていき,

全空間に ストカスティックな領域<sup>\*\*\*)</sup>が広がっていく。自由度  $2$  の Hamilton

\*) 自由度  $f$  の完全可積分系は, action  $I$ , angle  $\theta$  で記述でき, その

解は,  $I_i = I_i^0$ ,  $\theta_i = \omega_i t + \theta_i^0$  ( $i=1, 2, \dots, f$ ) となる。軌道は,  $\{I_i^0, \dots, I_f^0\} \times T^f$

上を運動するので, これをトーラスと呼ぶ ( $f$  次元)。

\*\*) K.A.M. トーラス と呼ぶ。

\*\*) 勿論, 局所的には, elliptic な周期点や, hyperbolic な周期点か

存在し, elliptic な点のまわりには, トーラスがある。更に, そのトーラスの

まわりには, elliptic, hyperbolic point が存在し... という, 階層構造

になっている。

系では K.A.M. トーラスは空間を分割していろど、単一の軌道が全空間に

広がっていきけるためには、全2の K.A.M. トーラスが壊れぬほならない。最後に壊

れる K.A.M. トーラス<sup>\*)</sup>を特徴づける試みか、Greene, Kodanoff, Shenker<sup>\*)</sup>に

よってなされ、 $w$ が黄金比の逆数( $w = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ )の K.A.M. トーラスが、

Last K.A.M. であるという conjecture のもとに、糸鋸り込み群によるアプローチ

がなされた。<sup>33)</sup> winding number を一定に保つという手法は 散逸系のトーラスの

研究にも適用された。<sup>34), \*\*)</sup>

以上の他に、S.A. 内の不安定平衡点 (或いは、不安定周期解) の不安定多

様体<sup>35)</sup>が、別の安定な解の basin に触れて (ヘテロクリニック交差)、S.A. が

消失する現象、いわゆる crisis の逆プロセスも、カオスへの1つのルートと

みることができよう。

\*) 自由度 3 以上の系 (或いは、Hamiltonian が時間に依存する自由度 2 の系)

では、K.A.M. トーラスが存在しても、stochastic layer をつたて、

任意の stochastic region まで移動できる軌道が存在する。

\*\*\*) 但し、 $w$ を一定に保つという方法での解析は、分岐現象を扱っている

のではない。

### 0-3. 物理系におけるカオス

物理学の分野におけるカオスの研究は、Commensurate-Incommensurate 転移 (以下 Comm. Incomm. 転移と略す), Localization, 光乱流, 乱流等の問題と関連になされている。又、古典力学におけるカオスと量子系での現象との対応, 或いは、カオス軌道の量子化等の問題も議論されている。ここでは、それらについてごく簡単な説明を行う。

Comm.-Incomm. 転移の問題では、例えば、1次元周期ポテンシャル中で<sup>36),\*)</sup> 相互作用する原子系を扱う (対応する物理現象は、例えば 結晶表面へのガスの吸着)。T=0 では、エネルギーが極値になりという条件より、連続する3つの原子の位置についての関係式が導かれ、これより2次元写像が構成される。ポテンシャルの深さと相互作用の強さの兼ねあいで、原子の安定な配置が変化し、ポテンシャルの周期  $a$  に対して、原子の平均距離  $l$  が有理比の場合 (Comm.) と無理比の場合 (Incomm.)

\*) 例えば  $H = \sum_i [\frac{1}{2} (u_{i+1} - u_i)^2 + \lambda V(u_i)]$ ,  $u_i$  は  $i$  番目の原子の位置。



とで解の性質は大きく変わる。<sup>\*)</sup> Comm. phase は周期解に、Incomm. phase は、

概周期解に対応している。又、準安定状態としてカオス相も存在する。他にも、

ANNNI Model (<sup>37)</sup> Axial (Anisotropic) Next Nearest Neighbor Ising Model)

において、平均場近似、低温展開の手法を使って、種々の相図が得られて

いる。<sup>\*\*)</sup> 又、hierarchical Ising Model において、frustration を強くして

いくと、糸染り込み群の方程式 (糸染り込み操作の前後の結合定数を

結びつける式、1次元写像) の解がカオティックになり、これがスピングラス

相に対応するという議論もある。<sup>38)</sup> Localization の問題では、kicked

rotator の量子力学系と、1次元 random Lattice 中の伝導電子とを

関連づけた話や、<sup>39)</sup> Incomm. potential 中の電子の運動を2次元写像で

\*) Comm. の場合には、エネルギーギャップが存在するか、Incomm. の場合

には、並進に対する対称性があり (ゴールドストーンモード)、ギャップは存在しない。

\*\*) 横軸にパラメーター、縦軸に波数をとったときのグラフは、モテールによつて、

たださかになる場合、Comm. phase のみが無限個存在する devil's

staircase を形成する場合等がある。実験的には、CeSb において、

7つの Comm. phase が観測されている。

記述する話がある。更に、光学系の乱流に関して、ring cavity 内の非線形媒質中を通過する光(レーザー)の従う遅延微分方程式が、様々な周期解、カオスを生み出し、それらの間に多様な遷移現象の存在することが見出されている。<sup>41)</sup> 乱流に関しては、前節で述べたカオスへのルートと関連して多くの研究がある。<sup>20), 27)</sup> 又、宇宙論においても Einstein 方程式の1つの解 'Mixmaster' 宇宙のダイナミクスが、1次元写像でかけ<sup>\*</sup>、その解がカオティックになり、その不変測度や  $K$ -エントロピー(正になる)が厳密に求まり、系がエルゴード的であることが示されている。<sup>42)</sup> 古典系と量子系との関連、量子系におけるカオスの問題では

1) Hamiltonian が時間に依存する場合の dynamics

2) 定常な場合のエネルギー・スペクトルと波動関数

について研究されている。<sup>43), \*\*)</sup> 1)では、あるパラメーター  $\lambda$  があって、

量子的な場合( $\lambda > 1$ )と古典力学がある時間までよい場合( $\lambda < 1$ )に

<sup>\*</sup>)  $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $T(x) = x^{-1} - [x^{-1}]$ ,  $x \neq 0$ ,  $T(0) = 0$ ,  $[ ]$  は Gauss の記号。

<sup>\*\*)</sup> 古典的には、 $K$ -系(ストカスティックな振舞を示す)であるような系の量子力学

系(このような系を <sup>43)</sup>では, quantal  $K$ -system と呼んでいる)を扱う。

分けることが出来る。ところが1の場合、 $t$ で決まる時刻  $t_n$  があり、 $t_n > t$  なら、波束の量子力学的平均値の時間発展と、古典力学に従う運動とは、少ししか異ならない。<sup>\*</sup>  
 $t_n < t$  で、波束は大きく広がるが、 $t$  場をなめらかにして、'平均場' を考えれば、 $t_n < t$  でも、平均値に従う方程式は、古典力学のものと大して違わない。しかし、量子効果が蓄積して、ある時刻で、 $\lambda$  以上に達すると ( $t_0 < t$ )、古典力学との対応はつかなくなる。2) の場合は、 $k$ -系に由来する randomness からエネルギー・スペクトルの分布密度や波動関数の振舞に影響を及ぼし、複雑化にするという議論がなされている。実験事実としては、原子核のスペクトルや、分子振動のスペクトル等がある。しかしながら、量子系で本当にカオスがあるかどうかという問題は、未だ未解決であると言えよう。<sup>\*\*)</sup>

\*) 従って、ストカスティックに振舞う。

<sup>44)</sup>  
 \*\*) Hogg and Huberman は、Hamiltonian  $H_0$  が 離散散固有値 を持つ。

それに付加される周期ポテンシャル  $V$  ( $V(t) = V(t+T)$ ) が 共鳴的 でなく、

$\|V\|$  が有限であれば、波動関数とエネルギーの期待値が概周期的

であることを示した。しかし、古典的に、小さな摂動でもカオスが生ずるのは、

共鳴が生ずる場合なので、定理の前提をはずすと、異なる結論になる可能性がある。

## 0-4. 本研究の目的

前節まではカオス研究の一端について大まかに説明してきたが、この節では本研究の目的について述べる。

第1章での議論は、S.A.の周期外力への応答の問題に関連する。この種の問題では、ローレンツ・アトラクターにノイズを加えて相関関数の計算を行なった研究や<sup>45)</sup> 1次元写像でノイズを加え、2分岐及び<sup>46)</sup> Intermittencyへの影響<sup>23)</sup>を調べた研究、ノイズを含めたスケール則の議論<sup>47), 23)</sup>、更に1次元写像に周期外力を加えた研究<sup>48)</sup>等がある。第1章ではローレンツ・モデルに sinusoidal な外力を対称性を破らないうように加えた系(0.5) (強制ローレンツ・モデル)

$$\frac{d}{dt}x = -\sigma(x-y)$$

$$\frac{d}{dt}y = rx - y - xz \quad (0.5)$$

$$\frac{d}{dt}z = xy - bz + A \cos Bt$$

を扱う。但しパラメータは、 $\sigma=10$ ,  $b=2.6667$ ,  $r=28$ である。この系で1ヶ月前、

A, B を大きくかえて相図を描き、種々の量の計算を行なったが、<sup>50)</sup>

\*) 1次元写像のダイナミクスの観測可能性への外部ノイズの役割を

論じた研究もある。<sup>49)</sup>

ここでは、相図の 特徴的な領域に焦点をあわせて、分岐現象の詳細を  
明らかにし、カオスへのいくつかのルートについて議論する。

第2章では 3次元常微分方程式の解の 位相的性質について議論  
する。力学系でのトポロジーの問題は、Birman<sup>50)</sup> によつて、ローレンツ・アトラクター  
内の新しい結び目(ローレンツ・ノット)を持つ 周期解についての研究があるが、  
この章では 周期解や  $S.A.$  を位相的に特徴づける 諸量を定義し、解の  
分岐とトポロジーの変化について考察する。これは 従来の、metrical,  
measure theoretical な 議論とは別に、カオス的な軌道の 3次元空間  
への埋め込みの 複雑さ、即ち topological な 複雑さを記述する  
1つの 言式みである。

尚、第1章全部 及び第2章の 第4節までの内容は 既に 論文として<sup>52)</sup>  
発表されている。

## 第1章 カオスへのルート 25

(強制ローレンツ モデルを例にとりて)

1-0. モデルと相図

この節では、モデルの説明と、相図から得られる知見について概観する。

強制ローレンツモデル(1.1)は、ローレンツモデル(1.1)で強制外力 $=0$ と

同様に  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$  なる変換に対して不変であり、 $z$ 軸は、

不変集合になっている。<sup>\*</sup>

$$\frac{d}{dt}x = -\sigma(x-y)$$

$$\frac{d}{dt}y = rx - y - xz \quad (1.1)$$

$$\frac{d}{dt}z = xy - bz + A \cos Bt$$

$$\sigma=10, \quad b=2.6667, \quad r=28$$

図7.8は、 $(A, B)$ 空間での相図であり、安定なカオス相とリミットサイクル相(以下

各々 C相, L相 と略す)が複雑に分布している。これからわかるように、

S.A.は ほぼとも(1.1)のような振動の入り方に対しては安定であり、 $A \sim 20$

<sup>\*</sup>  $z$ 軸上の周期解  $(0, 0, \frac{A}{\sqrt{b^2+B^2}} \cos(Bt-\phi)) \equiv (0, 0, z_0(t))$ ,  $(t_0, \phi - \frac{\pi}{B})$  は、

不安定で stroboscopic mapping  $M^0$  (ストロボ マップと略す) のサドル点に

なっている。但し  $M^0$  は、 $\vec{x}(t)$  を (1.1) の解とするとき、 $\vec{x}(t_0)$  を  $\vec{x}(t_0 + T_F)$  に写す

写像、( $T_F$  は外力の周期,  $T_F = \frac{2\pi}{B}$ )。又  $z = z - z_0(t)$  とおくと  $(x, y, z)$

を変数とし、 $r$  のかわりに  $r(t) = r - z_0(t)$  とし、 $A=0$  としたローレンツモデルになる。

で始めてL相が出現する。又、リミット  
サイクルにはいろいろなタイプがあり(図8)。  
それは、1. 周期、2. 対称性、3. 位相的性質  
によって分類される。又、S.A.は、1. 対称性、  
2. 位相的性質によって分類される。更に  
Poincaré sectionを適当にとったとき、図9

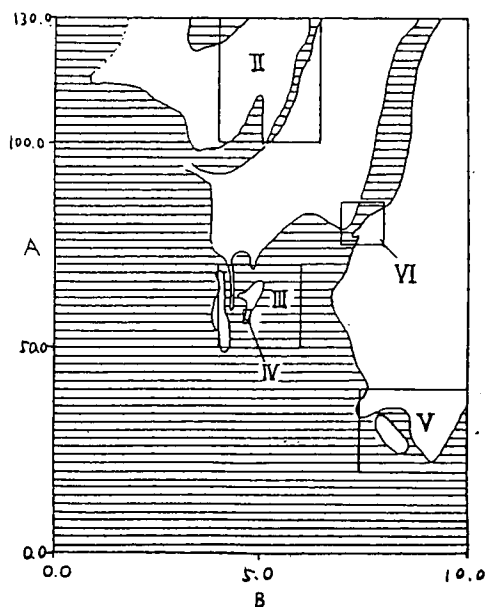


図7. 白い部分がL相  
(この図自体がI)

のように、 $x > 0, y > 0$ の領域R

と  $x < 0, y < 0$ の領域Lを周  
期的に訪れる場合 (type  $\alpha$ ) と

そのような周期性がない場合  
(type  $\beta$ , 図10) とがある。これは、

2次元上の不安定リミット・サイクル

の関与する現象である。

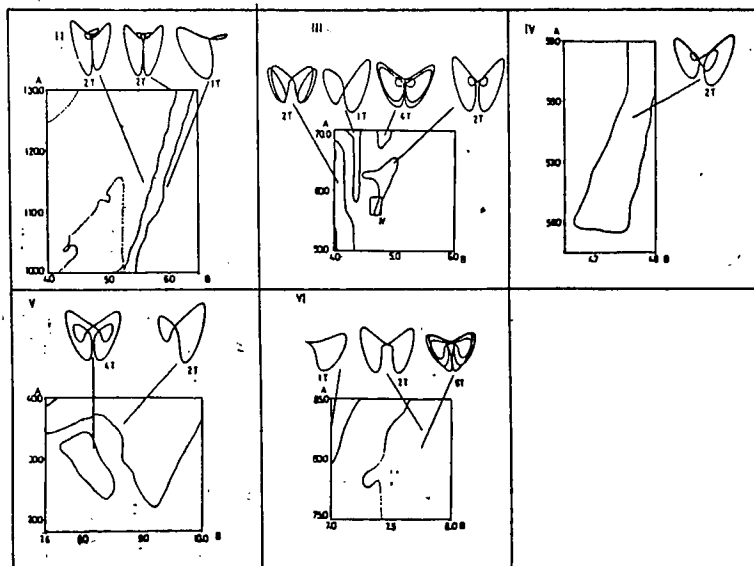


図8 図7における領域II~VIの拡大図

\* ) 島カオスに対応。

\*\* ) type  $\alpha$  は type  $\beta$  より ストカスティシティの度合は小さいと考えることができ、

それは、LとRの記号列のエントロピーによって評価できよう。

相図から得られる知見としては、

① カオス領域はつながっているように見える。

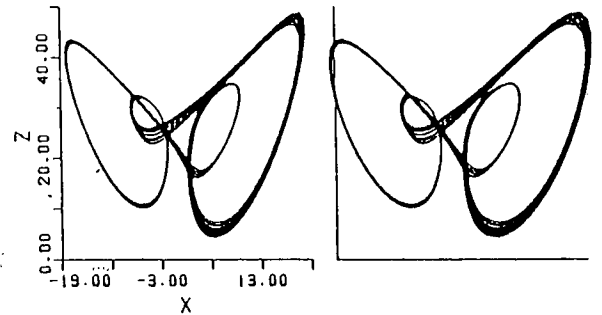


図 9. Stereoscopic Portrait

$A=56.1, B=4.67$

融合してできた対称リミット・サイクル  
の中間領域にカオスがある。

③ 異なるタイプのリミット・サイクルの共存は  
あるが、カオスとリミット・サイクルの共存は  
ない。<sup>\*</sup>

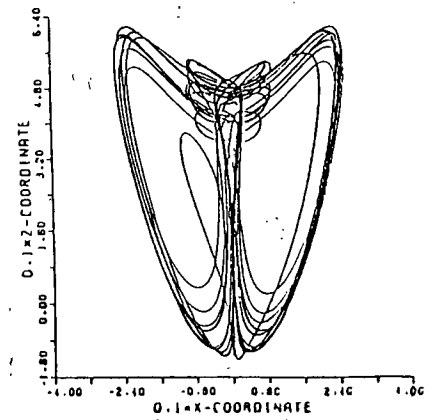


図 10  $A=120.0, B=6.0$

の3つが挙げられる。これらの特徴は、一般的なものかどうかは定かではない。

53)

①については、カオス領域が孤立している系があり、③についてもローレンツ・モデルで

54)

固定点とカオスの共存する領域がある。②もカオスなら必ずそうなっているという

わけではない。②の例を図11, 12に示す。リミット・サイクルやカオスの種々の

<sup>\*</sup>)この章全体を通じて、リミット・サイクル、カオスは、特にことわらない限り、全て

アトラクターである。ここで共存とは、2つ以上のアトラクターが、同じパラメータで、

同時に存在することをいう。



遷移現象は、対称性を見地からまとめると

図13のようになる。<sup>\*</sup> (1)は、ピッチフォーク

分岐 (Symmetry breaking), (2)は  $2^n$  分岐,

(3)は ホモクリニック交差による Intermittency,

(4)は ヘテロクリニック交差による Intermittency,

(5)は basinの接触 (或はヘテロクリニック

交差とみられる) である。(6)は、ストロホフ

マップ<sup>o</sup>での Hausdorff 次元  $D_H$  が,  $1 < D_H < 2$

から  $2 < D_H < 3$  へ遷移する現象で

ある ( $A \approx 61$ ,  $B = 6$ )。③については、

例えば  $A = 131.0$ ,  $B = 6.5$  で、

図14の2つのリミット・サイクルが

共存している。但し共存の生ず

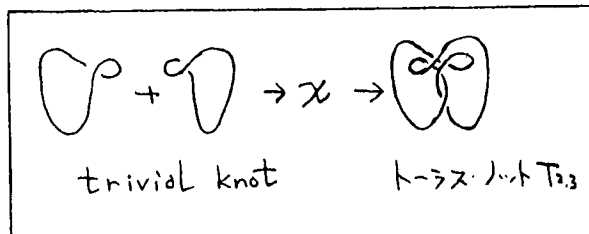


図11. 領域II.  $\pi$  はカオス。

(trivial knot, トーサ・ノットについては) 2-0 参照。

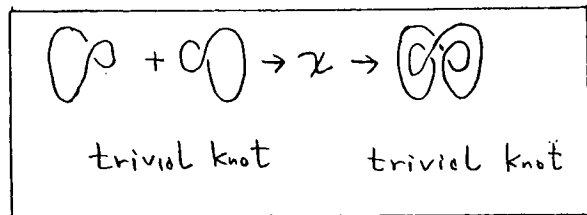


図12. 領域V

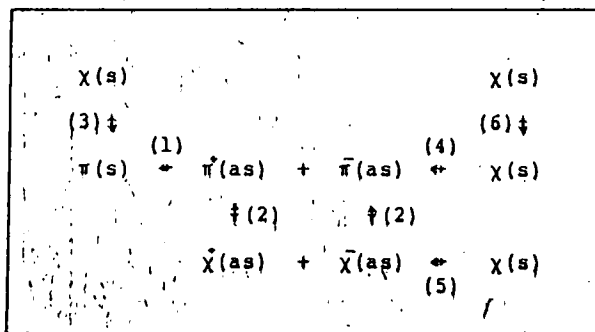


図13.  $\pi$  は周期解を意味する。  
s: symmetric, as; asymmetric

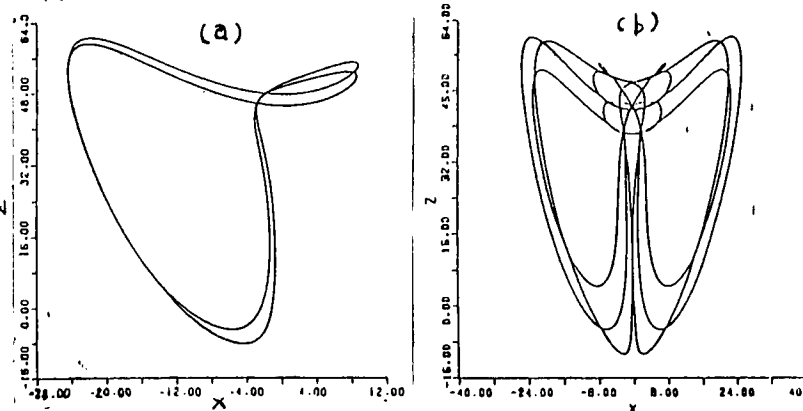


図14. (a): 2周期解, (b): 6周期解

<sup>\*</sup> 強制ローレンツモデルで生じている現象である。他のメカニズムも当然

考えられよう。例えば (2)は Intermittency でも可能であり、 $\pi \leftrightarrow \pi$

は, crisis でも可能。

るパラメータ領域は、極めて小さい。又、これらのリミット・サイクルの basin は、3次元空間内に複雑に分布している。<sup>\*</sup> 図11や図12、それに第2章で述べるオリジナルローレンツ・モデル(ローレンツ・モデルを強制系 $A$ と別して、以下このようによらう)でのあるパラメータ領域における分岐は、(1)  $\rightarrow$  (2)  $\rightarrow$  (5)  $\rightarrow$  (3) のルートをとる。

次節では、領域 II での上記のルート及び領域 IV での (4) の遷移について詳細に調べる。

\* 非自律系であるため、初期時刻  $t=0$  における basin を問題にする。

# 1-1. カオスへのルート

2. 非対称・リミットサイクル  $\rightarrow 2^n$  分岐  $\rightarrow$  非対称カオス  $\rightarrow$  バンド マージング  $\rightarrow$

$\rightarrow$  対称カオス,  $A_c = 116.43$ ,  $B = 6.0$  (固定), 図 7.8 の II の領域。

パラメータ  $A$  を 114.9 から上げてゆくと, 周期 1 (単位  $T_F$ ) の非対称リミット・

サイクルから, 倍周期分岐が順次生じる。(64 周期まで観測)。表 1. 図 15.

$2^k$  周期領域でのストロボ マップ  $(M^k)^{2^k}$  の微分  $d(M^k)^{2^k}$  の固有値は, 数値

計算より, 近似的に次のようにかける。図 16.

$$\lambda_{1,2}^{(k)} = C^{(k)} \pm \sqrt{\{C^{(k)}\}^2 + B^{(k)}} \quad (|\lambda_1^{(k)}| \geq |\lambda_2^{(k)}| \geq |\lambda_3^{(k)}|)$$

(1.2)

$$C^{(k)} = -\sqrt{a^{(k)}} (A - A_c^{(k)})$$

$2^k$	2	4	8	16	32	64
$A_c^{(k)}$	114.957	116.187	116.37	116.412	116.4199	116.42145

表 1.  $2^k$  周期解の onset point

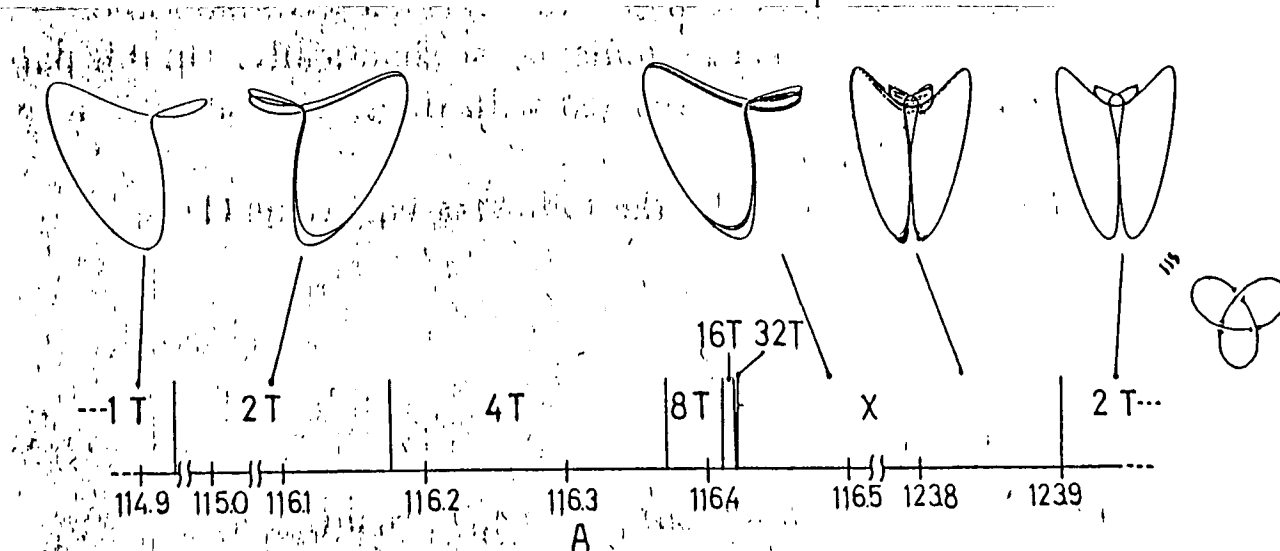


図 15

但し第3番目の固有値  $\lambda_3^{(k)}$  は、非常に小さい値になる。(後で議論する)。

$A_c^{(k)}, a^{(k)}, B^{(k)}$  の値

は表2のように

なる。

これは、Henon

マ、 $\Gamma^0(1.3)$  の

原点での安定性

と、パラメータ表

存性が同じで

ある。

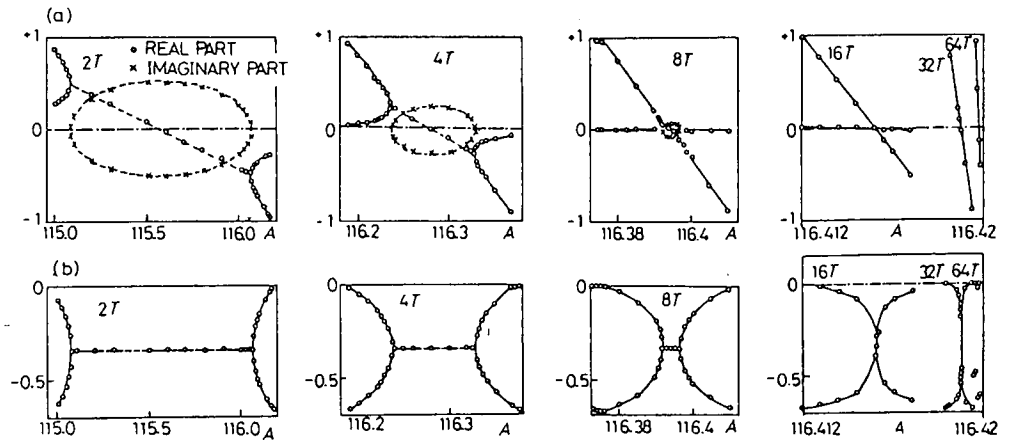


図16  $2^k$  周期領域 ( $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) の (a) 固有値  $\lambda_{1,2}^{(k)}$  と (b) Lyapunov 数  $L(1), L(2)$  のパラメータ依存性。(但し図は、 $T_F L(i)$ )

	$a^{(k)}$	$B^{(k)}$	$A_c^{(k)}$	$B^{(k)}/(B^{(k-1)})^2$	$(B^{(k)})^{1/2^k}$
$k=1$	1.036944	0.2524271	115.5722	1.067018	0.502422
2	31.68720	0.0679898	116.2820	0.980328	0.510635
3	757.3501	0.0045317	116.3943	1.004884	0.509368
4	16251.12	$2.0636 \cdot 10^{-5}$	116.4160	***	0.509523

表2. adjustable parameter  $a^{(k)}, B^{(k)}, A_c^{(k)}$  と、比  $B^{(k)}/(B^{(k-1)})^2$  及び  $B^{(k)}$  の評価  $(B^{(k)})^{1/2^k}$  の値。

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -By_n + 2Cx_n + 2x_n^2 \\ x_n \end{pmatrix} \equiv G_{B,C}(x_n, y_n) \quad (1.3)$$

Henon マ、 $\Gamma^0$  と、 $C \in \frac{1+B}{2}$  から下げると、原点から順次  $2^n$  分岐を生じる

\*  $L(i)$  は、 $i$  番目の Lyapunov 数で、 $2^k$  周期領域では、 $L(i) = \frac{1}{T^{(k)}} \ln |\lambda_i^{(k)}|$ ,

但し、 $T^{(k)} = 2^k T_F$ 。又最大の2次元 Lyapunov 数  $L_2$ , 3次元 Lyapunov 数

を  $L_v$  とかくと、 $L_2 = L(1) + L(2)$ ,  $L_v = L(1) + L(2) + L(3) = -(0+b+1) = \text{一定}$  となる。

が、2周期解が分岐したとき、そのまわりでの2階写像は、変数及び係数を

線り込むことにより、近似的にもとと同じ形になる。<sup>55)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} x'_{n+1} \\ y'_{n+1} \end{pmatrix} &= G_{B,C'}(x'_n, y'_n) \\ x'_n &= \alpha(x_{2n} - x^*), \quad y'_n = \alpha(y_{2n} - y^*), \quad \alpha: \text{scaling factor,} \\ (x^*, y^*) &: 2\text{-periodic point} \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

$$\begin{pmatrix} B' \\ C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^2 \\ -2C^2 + 2C(1+B)C + 2B^2 + 3B + 2 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

$G_{B,C}$  の1周期解の固有値は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \text{i) } \lambda_{\pm} &= C \pm \sqrt{C^2 - B} \quad \lambda_{\pm}: \text{real}, \quad C^2 \geq B \\ L(1) &= \ln|\lambda_+|, \quad L(2) = \ln|\lambda_-| \\ \text{ii) } \lambda_{\pm} &= C \pm i\sqrt{B - C^2} \quad \lambda_{\pm}: \text{complex}, \quad C^2 < B \\ L(1) &= L(2) = \frac{1}{2} \ln|\lambda_+| = \frac{1}{2} \ln|B| \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

(1.2)と(1.6)は同じパラメータ依存性を示している。又、(1.5)より  $\frac{B'}{B^2} = 1$ ，表2

のデータ  $\frac{B^{(k)}}{(B^{(k-1)})^2}$  もほとんど1。従って、この2分岐の領域で、強制ローレンツ系

は、Hénon マップで近似できることがわかる。これは、次のようにして理解できる。

まず、次の命題が証明できる。(付録 A)。

「散逸率<sup>\*</sup>一定( $\neq 0$ )の 2次元写像は、固定点のまわりの 2次のオーグーの非線形項までを考えると、変数変換により、2 Hénon マップ<sup>o</sup>に帰着できる。」

さて、考えている領域<sup>o</sup>で、第 3 Lyapunov 数  $L(3)$  は、第 1, 第 2 Lyapunov 数  $L(1), L(2)$  に比べて非常に小さく、しかもほぼ一定なので、ストロボ マップ<sup>o</sup>を

考えたとき、軌道は 2次元 slow manifold に急速に近づき、その上では、

$L_s = L(1) + L(2) = L_v - L(3) \approx \text{一定}$  となる。従って散逸率は、ほぼ一定だと

考えられ、上述の命題によつて、slow manifold 上の写像を Hénon マップ<sup>o</sup>

で近似できることがわかる。<sup>\*\*</sup> 表 1 のデータより散逸率  $B \sim (B^{(n)})^{\frac{1}{2n}} \sim$

0.51 となる。Hénon マップ<sup>o</sup>では、 $2^k$  周期解の安定領域での複素固有

値の領域の占める割合  $\Delta^{(n)}$  は近似的に次のようになる。図 17。

\* 一般に  $n$  次元写像  $\vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n)$  において、 $\vec{x}$  における微小体積  $dV(\vec{x})$

は、 $\vec{f}$  が作用させることにより、 $dV' = \left| \frac{\partial \vec{f}(\vec{x})}{\partial \vec{x}} \right| dV(\vec{x})$  となる。 $\left| \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right|$  は、Jacobian の

行列式。この  $\left| \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right|$  のことを、点  $\vec{x}$  での散逸率と呼ぶ。

\*\* 3 次の項まで入れると、Hénon マップ<sup>o</sup>にはならないが、分岐がすうめば、

2 次の係数が 0 にならない限り、3 次以上の項は無視できる。

$$\Delta^{(k)} \cong \frac{2\sqrt{B^{(k)}}}{1+B^{(k)}} \quad (1.7)$$

$B^{(k)} = 1$  のとき  $\Delta^{(k)} = 1$  であり,  $\Delta^{(k)}$  は 2次元小生の

目安となる。iteration を繰り返していくとき、

$\Delta^{(k)} \rightarrow 0$  となるが 近似的に 1次元 的になる

(Feigenbaum 理論が適用可能になる) iteration 図 17.  $C_0^{(k)} = \frac{1+B^{(k)}}{2}$ ,  $C_1^{(k)} = -\frac{1+B^{(k)}}{2}$

$$D_0^{(k)} = \sqrt{B^{(k)}}, E_0^{(k)} = -\sqrt{B^{(k)}}.$$

の回数  $n_c$  は,  $n_c \propto \frac{1}{\ln B}$  の依存性を持つ。

表 3 に Feigenbaum 定数

$\delta_2$	$\delta_3$	$\delta_4$	$\delta_5$
$6.44 \pm 0.77$	$5.123 \pm 0.420$	$4.740 \pm 0.132$	$4.715 \pm 0.552$

$\delta$  の評価値を示す。

表 3.  $\delta_n = \left\langle \frac{A_n^{(10)} - A_{n-1}^{(10)}}{A_{n+1}^{(10)} - A_n^{(10)}} \right\rangle$  ;  $\langle \rangle$  は いくつかの  
評価法による平均。

パラメーター  $A$  の値が  $A_c = 116.43$  以上になると、島カオスが観測され、バード

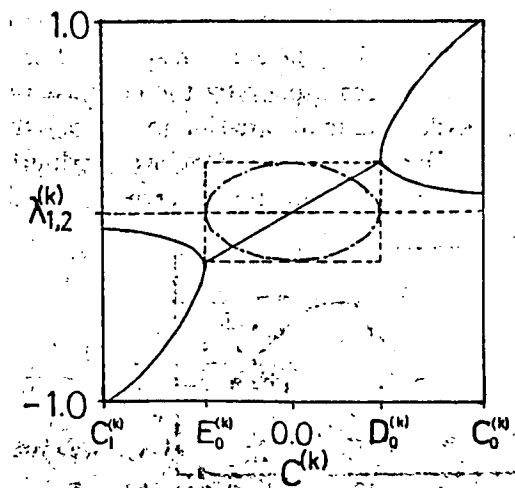
マージングが生じ、 $A \sim 116.49$  で 2つの非対称な島カオスが結合して、1つの

対称カオスになる。このプロセスには  $z$  軸上にある不安定リミット・サイクルが

関与していていると考えられる。以下「ストロボ」マップ  $M^0$  での現象を考察する。

$z$  軸上の不安定リミット・サイクルは、 $M^0$  のサドルであり  $(0, 0, \frac{A_b}{b^2 + B^2})$  の点にある。

この点での  $dM^0$  の固有値は、 $\lambda_1 \sim 10^6$ ,  $\lambda_2 \sim 10^{-2}$ ,  $\lambda_3 \sim 10^{-10}$  であり、固有方向



$\vec{e}_1, \vec{e}_2$  は  $(x, y)$  成分のみを持ち、 $\vec{e}_3$  は  $z$  成分のみを持つ。<sup>\*</sup> 図 18。

サドルの安定多様体  $W^s$  は 2つの非対称 S.A.

を分離しているが<sup>\*\*</sup>、 $A$  の増加とともに アトラクターと

$W^s$  の距離が次第に小さくなり、ついに接触する

ことにより、2つのアトラクターの合体がおこると考える

ことができる。(対称性より接触は、同時におこる)。

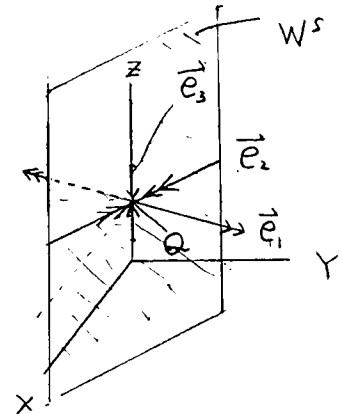


図 18 Q: サドル

そして、サドルも S.A. の一部分となる。図 19。

標語的に言えば、「サドルの安定多様体と

不安定多様体の交差、つまりホモクリニック

交差の発生により、2つの非対称な S.A.

が合体する<sup>\*\*\*</sup>。対称な S.A. において、以前

の非対称 S.A. の 1つに対応する状態から、もう一方の

状態への遷移が生ずるのは、 $z$  軸付近の領域

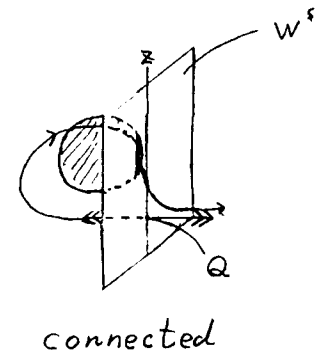
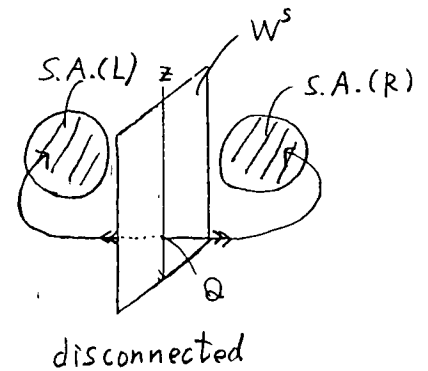


図 19

<sup>\*</sup>)  $e_1 \approx (0.4, 0.9, 0)$ ,  $e_2 = (0, 0, 1)$ ,  $e_3 \approx (-0.7, 0.7, 0)$

<sup>\*\*</sup>)  $W^s$  は 実際には 極めて複雑な形状 (枝分かれ状) をしていると考えられる。

図 17, 18 は、あくまでも schematic なものである。

<sup>\*\*\*</sup>) ここでの議論は、厳密な証明を行なったものではない。



に軌道が入るときであり、S.A.の片側に続け滞在する時間は、この領域に入るまでの時間と考えられ、

パラメーターAを増加させるにしたがって減らしていく。図20.

パラメーターを更に大きくすると

$A_{c2}=123.899$ で安定なリミットサイクルが出現する。この遷移について次に議論する。

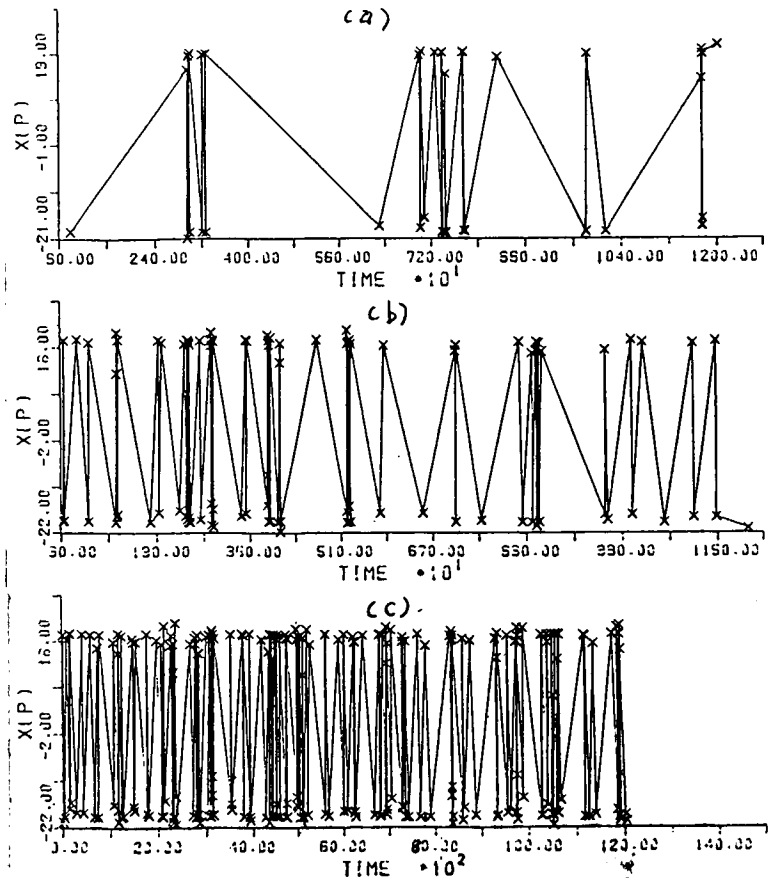


図20.  $L \leftrightarrow R$  の変化.  $\times$ と $\times$ の間は、左側の $X$ のある領域に滞在する。上が“R”, 下が“L”.  
(a)  $A=116.49$ , (b)  $A=116.5$ , (c)  $A=116.52$   
全2  $B=6.0$

b. ホモクリニック交差の生成による

Intermittency  $A_{c2}=123.899$ ,  $B=6.0$  (固定)

$A > A_{c2}$  で出現するリミット・サイクルは、周期 $\varepsilon$ で対称である。<sup>\*</sup>一般に、

適当な条件のもとで、対称リミット・サイクルは倍周期分岐を生じない事が

証明できる。(付録B). 今の場合、リミット・サイクルが不安定化するときの  $d(M^0)^2$  の

<sup>\*</sup>この場合の結び目型は  $T_{2,3}$ .

固有値は +1 である。実験データは、ホモクリニック

交差の生成を示しており (図 21)、インターミッテントな

振舞<sup>\*</sup>が観測される。図 22。このメカニズムは、

従来のものと異なると考えられるが、これとともに、

後に考察する。

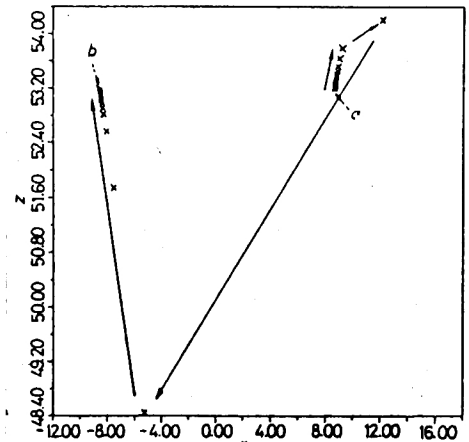


図 21, a: initial point

b: final point

C. ヘテロクリニック交差の生成に

よる Intermittency,  $A_{c3} = 54.865$ ,

$B = 4.7$  (固定), 領域 IV.

$A > A_{c3}$  での一対の周期 2 の非

対称リミットサイクルが安定であり

$A < A_{c3}$  では、対称な S.A. が安定で

ある。図 23。リミットサイクルは、 $(M^0)^2$

でめれば フォーカスであり、 $A = A_c$  で

$\lambda(M^0)^2$  の複素固有値の絶対値が 1 に

なる。この遷移も Intermittency で

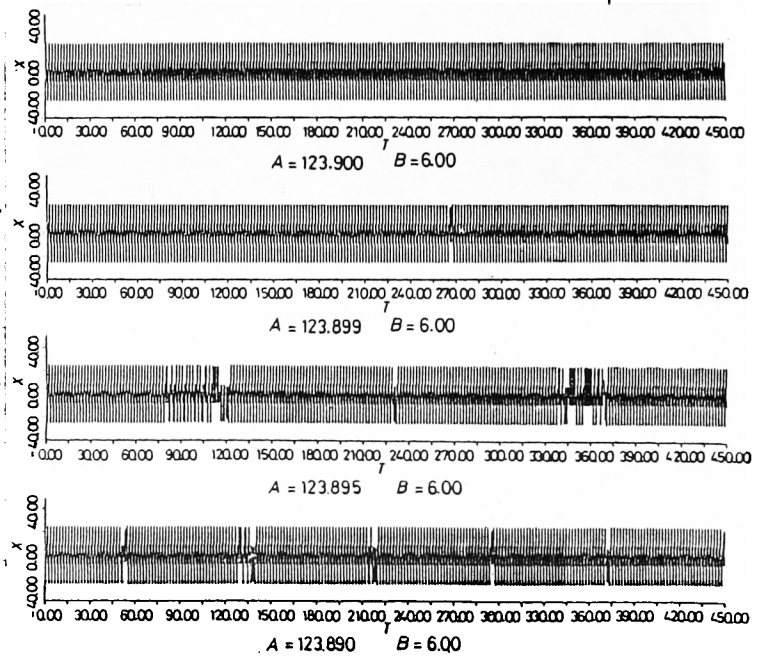


図 22

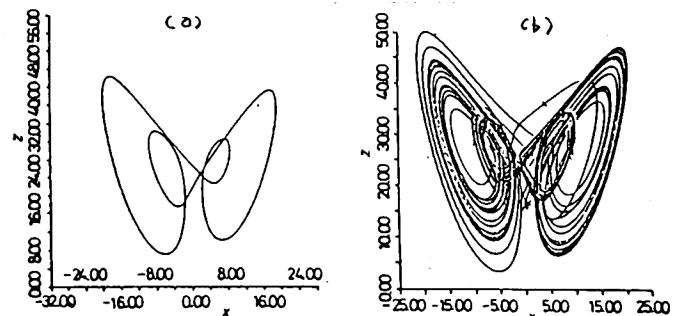


図 23, (a)  $A = 55.22$ , (b)  $A = 54.86$

\*). 層流状態に intermittent に burst が生じる現象も、ここでは Intermittency と呼ぶ。

あり(図24)、図24で envelope が波状になるのは、複素固有値であることが  
反映している。又、一対の非対称リミット・サイクルに対応して、層流状態が2種類

ある。<sup>\*</sup> Lyapunov 数の ハロウマター  
依存性を、図25に示す。固有値が  
複素数であるため、 $A > A_{c3}$  で、 $L_s =$   
 $2L(1)$  であり、 $A = A_{c3}$  で  $L(1)$  と  $L_s$  は  
同時に0になり、 $A < A_{c3}$  で両方とも  
正になる。この時、 $L(1) > L_s > 0$  なの？、

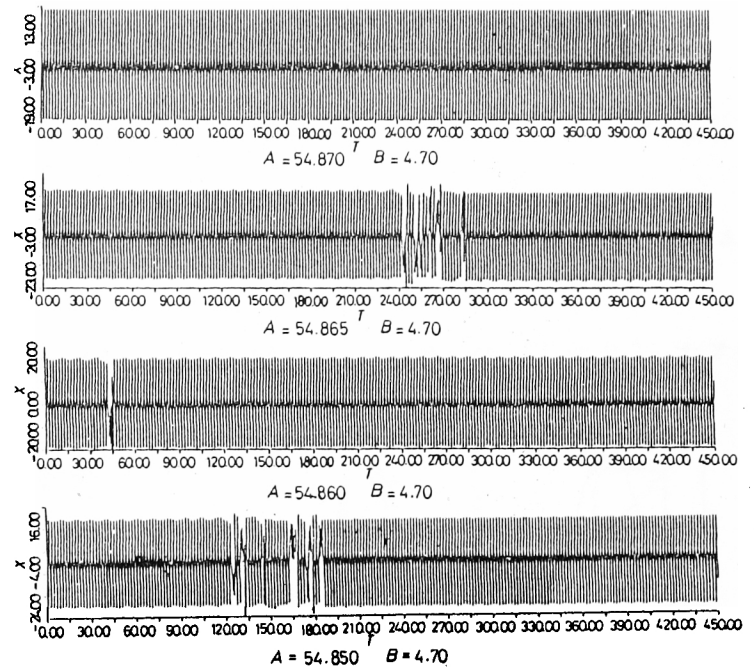


図 24

第2 Lyapunov 数  $L(2) = L_s$   $L(1)$  は  
負である。 $L_s > 0$  は面積が平均  
として指数関数的に増大して  
いくことを意味している。Koplan  
and Yorke の公式<sup>13), \*\*)</sup> によれば、

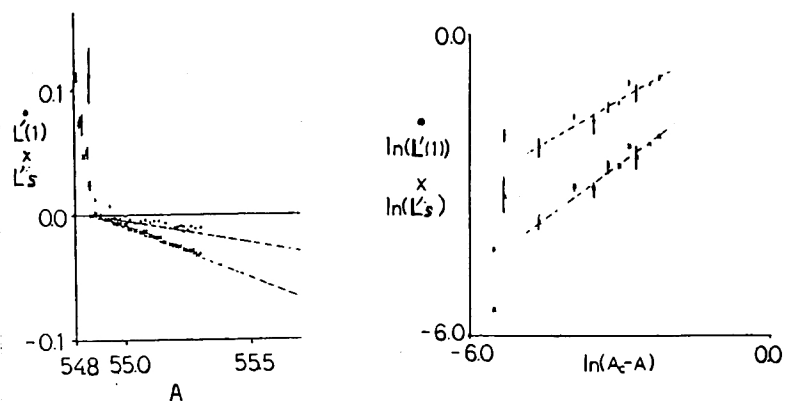


図 25  $L'(1) = T_F L(1)$ ,  $L'_s = T_F L_s$   
垂直の線分は、error bar.

<sup>\*</sup> 図24では判別できないうが、拡大すると、2種類あることがわかる。

<sup>\*\*</sup>  $D_H = k + \frac{L(1) + L(2) + \dots + L(k)}{L(k+1)}$ , 但し  $L, L(1) + L(2) + \dots + L(k) \geq 0$ ,  $L(1) + L(2) + \dots + L(k+1) < 0$

ストロボ マップ 2<sup>nd</sup> の S.A の Hausdorff 次元は, 2以上であり Hyper-chaos と考えられる。<sup>\*</sup>

さて, 次に 従来の Intermittency のメカニズムと, b, c 2<sup>nd</sup> のメカニズムと相違について議論する。Monneville and Pompeau<sup>22)</sup> によ, 2 論じられた Intermittency は

1次元写像における図26のプロセス, つまり逆 tangent 分岐によるカオス

への遷移である。(a)の状態では安定な

固定点  $x_s$  があるか (b) ではそれが不安定な

固定点  $x_u$  と合体消失する。軌道が以前の

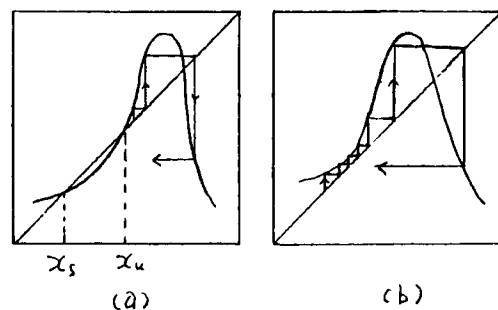


図 26

固定点の近傍にもどると, ここで長時間滞

在し, 層流状態を実現する。Intermittent な振舞が可能のためには, 層流

状態への回归のメカニズムが必要である。1次元写像の場合は, (a)の状態:

で  $x_s$  が global に安定であるためには  $x_u$  を出た軌道は  $x_s$  に吸引されるはず

図 (a) のように  $x_u$  の不安定多様体<sup>\*\*)</sup>が  $x_s$  の安定多様体になる筈である。

\* ) 第 2 Lyapunov 数が正になる場合を Hyper-chaos と呼ぶ場合もある。

\*\* ) ここでは, 1次元の場合も 安定, 不安定多様体という言葉を使った。

この構造が (b) の状態でも継続して、層流状態への回復が実現される。

以上は 1次元の場合であるが、Monneville and Pomeau の Intermittency の高次元

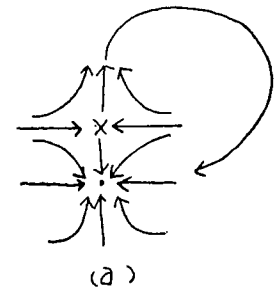
系でのメカニズムを次に考えてみる。その場合も サドル-ノード分岐の逆過程

により Intermittency になると考えられ、軌道の回帰性を実現するために、図 27

のようになると考えられる。<sup>\*</sup> (a) 2" サドルの

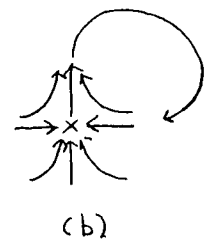
不安定多様体からノードの安定多様体になって

いる。ノードが global なアトラクターならば、必ず



こうなっている筈である。この構造は、(c) で 固定点

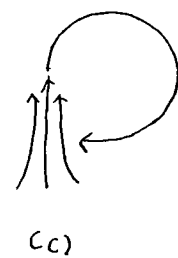
がなくなっても 継続して、回帰性を保証する。



要約すると、Monneville and Pomeau の Intermittency は、

サドル-ノード分岐の逆過程であり、安定な固定点が存在

する状態で既に、回帰的構造が存在しており、分岐後、



固定点の消失した状態でも、この構造が継続する

図 27

ため、Intermittent な振舞を示す。次に、b, c における

<sup>\*</sup> 図 27 は 写像でも、flow でもよい。但し 2次元 flow (自律系) では、

他に安定解が生じるのが不可能

Intermittency のメカニズムについて述べる。この場合、回帰的構造は、系の

対称性と密接に関連している。<sup>\*</sup>  $b$  の場合には、 $(M^0)^2$  でみると、 $A < A_{c2}$  で

2つの安定なロードが存在している。<sup>\*\*</sup> このとき図28のようになっていると考える。

但し、 $x_R$  と  $x_L$  の basin の境界である  $W^s$  は、

複雑な形をしていると予想される。<sup>\*\*\*</sup>

すなわち、 $A$  が  $A_{c2}$  以上になると、1つの方向が

不安定になり、ロードからサドルに変化

する。このとき、例えば  $x_R$  の不安定多様体は、

複雑な形状をしている。 $W^s$  と交差する。一方、

サドル  $Q$  の不安定多様体は、 $x_L, x_R$  の安定多様

体と交差しているため、結局、 $Q$  を介して

$x_R$  と不安定多様体と、 $x_R, x_L$  の安定多様体とが交差することになる。図29。

\*) 周期解の Floquet 指数が +1 のときには、generic には、サドル-ロード分岐が

生じるが、系に対称性のある場合には、ピッチフォーク分岐や、 $b$  の場合がある。

\*\*\*) 数値計算によれば、わずかな初期値の変化で、行きつく先が変化する。

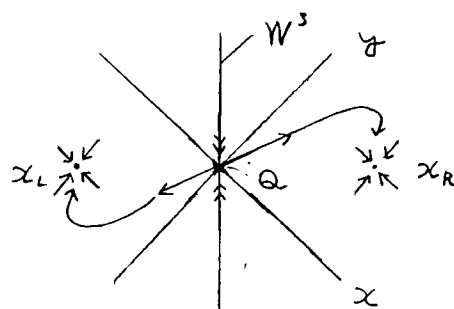


図 28

Q: サドル

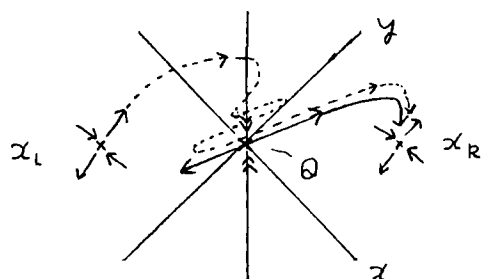


図 29

$$\lambda_1 \approx 0.97, \lambda_2 \approx 0.13, \lambda_3 \approx 3 \times 10^{-12}.$$

系は対称であるから  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$  としたプロセスも起こり、従って、 $x_R$  と

$x_L$  の間を軌道が往來する。これが b の場合の回復系のメカニズムである。

$x_R$  と  $x_L$  は  $M^0$  の 2 周期点であるため、 $M^0$  でみれば、サドル点とのヘテロクリニック

交差とともに、ホモクリニック交差が生じていることになる。不安定化直後では、

ひとたび  $x_R, x_L$  の近傍に軌道が落ち込むと、そこから脱するまでに、 $n \propto \frac{1}{|\ln|\lambda||}$

程度の iteration が必要となる。c の場合には、 $(M^0)^2$  で 4 つのフォーカスがある。

$M^0$  では、 $(x_L^1, x_R^1), (x_L^2, x_R^2)$  の 2 つの 2 周期点がある。<sup>\*</sup>  $A = A_{c3}$  でこれは

不安定化し 4 つの状態が混ざりしまい、非対称 S.A は生じず、いさなり

対称 S.A が生まれる。これをもう少し詳しく考察する。 $(M^0)^2$  での 4 つの

フォーカスは、 $A = A_{c3}$  で Hopf 分岐をおこすから、 $A < A_{c3}$  で 1 次元トラスが

できないため、inverted Hopf 分岐であると思われる。すると、 $A > A_{c3}$  では、

図 30 のようにフォーカスのまわりに不安定なトラスが存在すると考えら

れる。このとき、例えば  $x_L^1$  のまわりの不安定トラスの 2 次元不安定多様体

は  $W^s$  とのヘテロクリニック交差を介して  $x_R^1, x_L^2$  の安定多様体とヘテロクリニック

\*  $A = 54.88$  では、 $x_L^1 \cong (9.4, 11.2, 28.6)$ ,  $\lambda = 0.16 \pm i0.99$  ( $|\lambda| = 0.995$ ),  $\lambda_3 \approx 9 \times 10^{-6}$ .

交差を生いていると考えられる。そして、対称性より、 $(x, y, z)$   
 $\rightarrow (-x, -y, z)$  としたプロセスも  
 生じる。A が  $A_{c3}$  に近づくと  
 トーラスの半径が小さくなり、  
 $A = A_{c3}$  で トーラスは消失して  
 フォーカスは不安定になり、フォーカス  
 の2次元不安定多様体と他の  
 フォーカスの1次元安定多様体との  
 ヘテロクリニック交差によって、

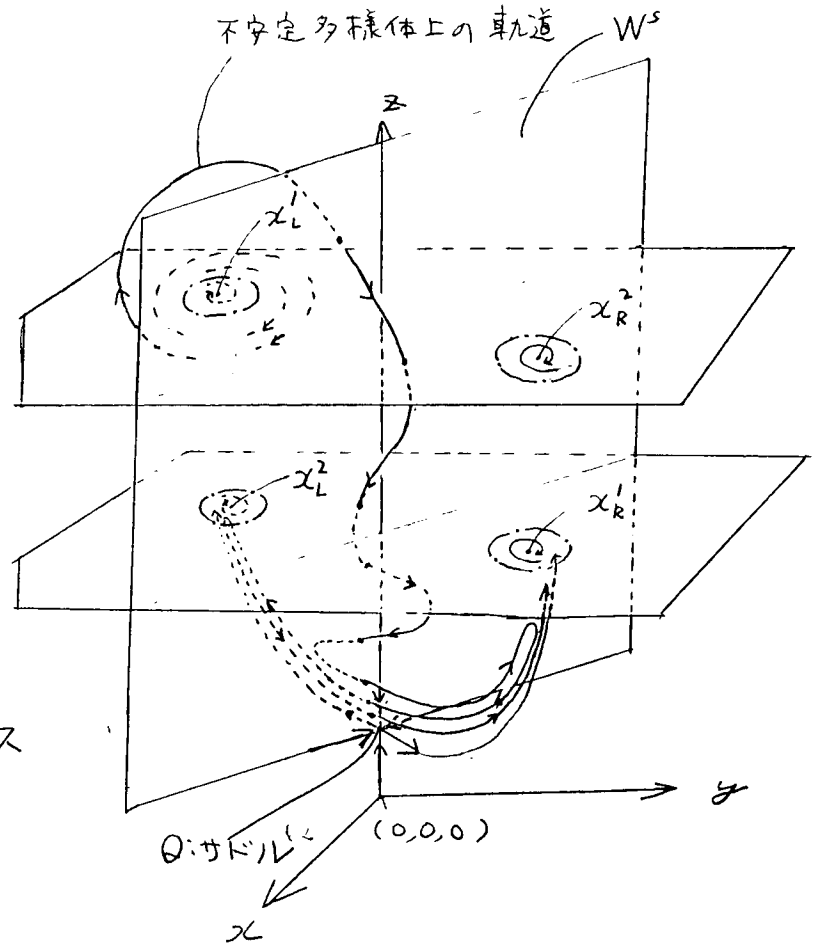


図30 1点全軌系, 不安定トーラス

Intermittency が生じる。層流状態への滞在時間は、2次元不安定多様体  
 のどこに回歸するかによって大きく変わる。

以上のように、b, c, d で生じている Intermittency は、系の対称性と密接に  
 関係しており、安定な周期点が不安定化して<sup>\*</sup>、z 軸上のサドルとのヘテロ。

\* サドルロード分岐の逆過程の場合は、周期解が消失したが、ここには、  
 存在する。



クリニク交差を介して、ホモ又はヘテロ・クリニク交差がハアーで生ずるために  
 回帰的性質が保証される。このようにメカニズムはサドル・ロード分岐の  
 逆過程と異なるが、図31に示す如く、パワースペクトルはリミット・サイクル  
 領域での  $\delta$ -peak が幅をもち、かつ  $\delta$  振動数成分が増加するという。

共通の性質を持つ。

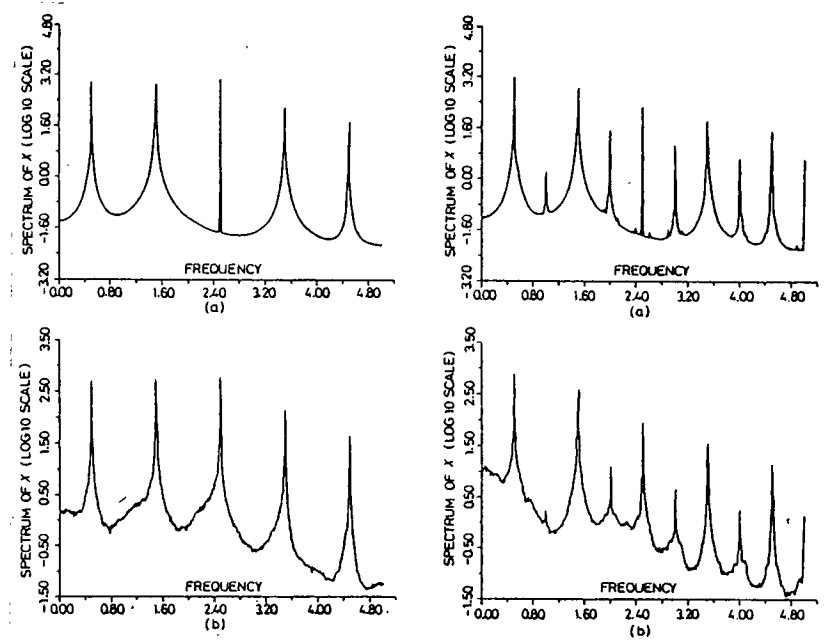


図31  $x(t)$  のパワー・スペクトル

左, (a)  $A=125.0$ ,  $B=6.0$ 、2周期解

(b)  $A=123.89$ ,  $B=6.0$ 、S.A.

右; (a)  $A=54.87$ ,  $B=4.7$ 、2周期解

(b)  $A=54.8$ ,  $B=4.7$ 、S.A.

## 1-2. まとめと議論

この章では、カオスへのルートについて、強制ローレンツモデルを例にとり調べた。

その結果、2分岐の領域でストロボマップ(3次元写像)がHenonマップで

近似できるということが示され、写像の1次元化のプロセスが明らかにされた。

又、従来のものとは異なるメカニズムの Intermittency が見出された。これは

強制ローレンツモデルに固有な現象ではなく、かなり一般的な系<sup>\*</sup>で成立

すると考えられる。但し、厳密に言えば、b. の場合には、 $A_{c2}$  以下の不安定

リミットサイクルの存在が証明されたわけではなく、この遷移については

まだ完全に明らかにされたわけではない。カオスへのルートとしては、他に

0-2. であげた 3) トーラス  $\rightarrow$  カオス があるが、Ruelle-Takens の説を

検証するためには、3次元トーラスの出現が可能な系を扱う必要がある。

更に、カオス-カオスの遷移、例えば3次元自律系での対称性の異なるカオス

間の遷移<sup>\*\*</sup>、 $n$ 次元の異なるカオス間の遷移等について、今後研究され

ねばならない。

\* ) b, c, の現象が、対称性を持たない系でどの程度一般的に生ずるかは

明らかではない。

\*\* ) 第2章(2-7)に、これについての議論がある。

## 第2章 3次元常微分方程式<sup>5)</sup> の解の位相的性質

### 2-0. 3次元空間内の閉曲線の位相的特徴づけ

この節では、むすび目型及びリンク数<sup>5)</sup>についての簡単な説明を行なう。

3次元ユークリッド空間  $R^3$  内の閉曲線は、そのむすび目型によって区別される。

2つのむすび目  $K, K'$  は、 $R^3$  から  $R^3$  への同相写像  $h$  により、1対1に写像される

とき、即ち  $K' = h(K)$  となるとき、同じ型に属するといわれる。<sup>4)</sup> むすび目は  $R^3$  への

埋め込まれたもので特徴づけることができる、基本群  $\pi(R^3 - K)$  (位相空間

$(R^3 - K)$  における始点を固定した閉曲線のホモトピー同値類<sup>4\*)</sup>) が重要な

な指標である。基本群の異なる、2つのむすび目型  $K, K'$  は異なるむすび目型

に属する。但し、逆は真ではない。現在までのところ、むすび目型を完全に規定

する不変量は知られていない。基本群  $\pi(R^3 - K)$  が与えられたとき、その

\*) これは同値関係による。

4\*)  $(R^3 - K)$  内の、始点を固定した2つの閉曲線は、連続に変形して、互に

重ねることができるとき、ホモトピックであるという。ホモトピックな関係は、

同値関係であり、この関係による同値類を、ホモトピー同値類と示す。

こゝは、群になる。この群は始点に依存するが、今、考えている空間  $(R^3 - K)$  は

弧状連結<sup>5)</sup>なので、始点の異なる2つの群は、同型となる。

群表示  $(\chi: \pi)$  が考えられ、図 32 の図式が成立する。

但しここで、 $\chi$  は  $\pi(R-k)$  の生成元と 1 対 1 に

対応する元の集合で、 $F(\chi)$  は、 $\chi$  を基底と

する自由群。  $R$  は  $\phi$  の核。 更に、詳細は

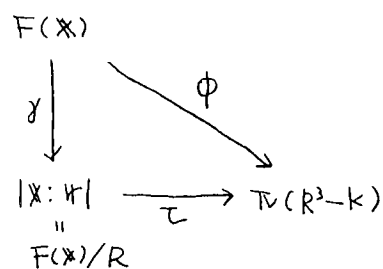


図 32

省くが  $(\chi: \pi)$  から Alexander 行列  $A$  という

行列を定義することができて、この行列から  $k$  番目

の初等イテリアル  $E_k$ ,  $k$  番目の結び目多項式

$\phi$ : 準同型,

$\gamma$ :  $\pi$  への準同型

$\pi$ : 同型

$\chi: \pi$ ;  $R$  の剰余群

表示  $(\chi: \pi)$  の群とよぶ。

$\Delta_k$  が得られる ( $k \geq 0$ )。  $E_k$  や  $\Delta_k$  が異なれば、結び目型の異なる事が

結論される。 結び目理論は、それ自体数学の一分野をなしており、現在も

未解決の問題が多い。 本論文では、周期解のむすび目型について、 $\pi(R^3-k)$

$E_k, \Delta_k$  を一般的に与える試みはなされてはいない。 結び目型については 1x 下で

簡単な結び目と、その Alexander 行列式  $\Delta_1$  を挙げるにとどめる。

\*  $E_k$  は  $0 < n-k \leq m$  ならば、 $A$  の全ての  $(n-k)$  行  $(n-k)$  列の小行列の行列式

による生成されるイテリアル, i.e.  $\left\{ \sum_{t=1}^{n-k} t R \right\}$ ,  $n-k > m$  ならば  $E_k = 0$ ,  $n-k \leq 0$  ならば  $E_k = R$ .

但し、 $A$  は、 $m$  行  $n$  列。  $R$  は、実数の集合。

\*\*  $\Delta_k$  は  $A$  の  $(n-k)$  行  $(n-k)$  列の部分行列式の最大公約数, 但し  $n-k > m$  ならば  $\Delta_k = 0$ ,  $n-k \leq 0$  ならば  $\Delta_k = 1$ . 特に  $\Delta_1$  は Alexander 行列式とよぶ。

a. trivial knot

$x^2 + y^2 = 1, z = 0$  と同値な結び目。図 33.

$$\Delta_1 = 1.$$



図 33

b. トーラス・ノット  $T_{p,q}$  ( $p, q$  は互いに素な整数)

2次元トーラス上を, 円周方向に  $q$  回まわる間に,

円環方向に  $p$  回まわる結び目。図 34.

$T_{2,9}$  は 交差が  $q$  個 (最小のとき) ある 図 35

のような結び目である。

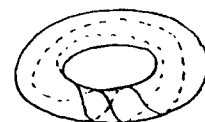
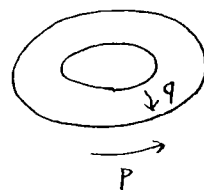


図 35

このとき,

$$\Delta_1 = t^{q-1} - t^{q-2} + t^{q-3} - \dots + 1$$

となる。



$T_{2,3} = \text{trefoil}$   
(3葉結び目)  
図 34.

次に、向きをついた2つの閉曲線  $C_1, C_2$  について考える。 $C_1, C_2$  がどのように絡み

あっているかを特徴づける量にリンク数  $L(C_1, C_2)$  があり、次式 (Gauss for-

mula) で定義される。

$$L(C_1, C_2) = - \frac{1}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|} \quad (2.1)$$

$\|\cdot\|$  は ユークリッド ノルム,  $(\cdot, \cdot)$  は 内積,  $\times$  は 外積。

これは 例えは  $C_1$  を 縁とする 閉曲面 (ガイフェルトの膜) を考え、その面に  $C_1$  による 決まる 向きをつけ、 $C_2$  がその膜を 通過するとき、 $C_2$  の向きと、膜の向きが 右ねじの関係にあれば  $+1$ 、左ねじの関係にあれば  $-1$  とし、それらを

加えあわせたものである。図 36。又は、 $C_1, C_2$  を 適当な方向からみることによる、横断的な交差が有限回生じるようにしてある。<sup>\*\*</sup> 例えは  $C_1$  に 注目して、 $C_1$  が  $C_2$  の下を 通下するとき、 $\nearrow$  に  $+1$ 、 $\searrow$  に  $-1$  を 割りあてる。これらの総和が  $L$  に 等しい。

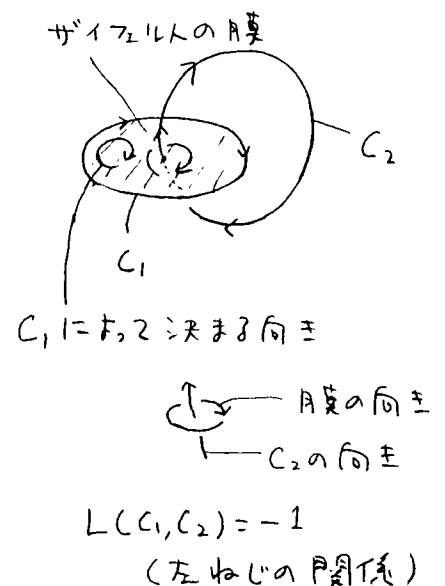


図 36

\* 膜の向きにねじを回したとき、進行方向が  $C_1$  の向きになるようなねじを考える。

\*\* 有限個の直線からなる結び目を多辺形結び目といい、それと同値な結び目

は、彫られている (tame) という。そうでないものは 野生 (wild) という。彫られた結び目

目では このような事は必ず可能。又 結び目のパラメータ表示が  $C^1$  級ならば彫られて

いることが示せる。<sup>56)</sup> この論文では、バクテル場を  $C^1$  級と仮定するので、解は彫られている。

以上で、閉曲系を位相的に特徴づける量についての説明をおこなう。次節

では、微分方程式の解としての閉曲系の特徴づけを行おう。

### 2-1. 3次元常微分方程式の周期解の位相的諸量

3次元常微分方程式(2.2)を考えよ。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{x}(t) &= \vec{F}(\vec{x}(t), t, \mu) \\ \vec{x}, \vec{F}(\vec{x}, t, \mu) &\in \mathbb{R}^3, \quad \vec{F} \in C^1 \\ \mu &: \text{バイフォークション パラメーター} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

2 (2.1)の周期解  $\vec{x}_0(t, \mu)$  を考えよ。  $T$  をその周期とする。又  $\vec{F}(\vec{x}, t, \mu)$

は、周期  $T_0$  の周期関数とする。

$$\vec{F}(\vec{x}, t+T_0, \mu) = \vec{F}(\vec{x}, t, \mu)^{*} \quad (2.3)$$

$\vec{x}_0$  を特徴づけるには、その結び目型の他に、力学系(2.2)の解があると

いうことを考慮し、その近傍での flow の様子を記述せねばならない。

そのために、 $\vec{x}_0$  のまわりの変分方程式(2.4)を考えよ。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{w}(t) &= D\vec{F}(\vec{x}_0(t, \mu), t, \mu) \cdot \vec{w}(t) \\ \{D\vec{F}(x, t, \mu)\}_{ij} &= \frac{\partial F_i(x, t, \mu)}{\partial x_j} \\ \vec{F} &= (F_1, F_2, F_3) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

\*) 2.1からの議論は、勿論自律系でも正しい。又、簡単のため

$T = mT_0$  ( $m$ , 自然数) とする。



この解は次のように書ける。

$$\begin{aligned}\vec{W}(t) &= \text{Exp} \left[ \int_{t_0}^t D\vec{F}(\vec{x}(\tau), \tau, \mu) d\tau \right] \vec{W}(t_0) \\ &\equiv dS_{\mu}^{(t, t_0)}(\vec{x}_0(t_0, \mu)) \cdot \vec{W}(t_0)\end{aligned} \quad \left. \vphantom{\int_{t_0}^t} \right\} (2.5)$$

$\text{Exp}[\ ]$  は ordered exponential, 又,  $S_{\mu}^{(t, t_0)}$  は (2.2) に従って,  $\vec{x}(t_0)$  を  $\vec{x}(t)$  に

写す写像<sup>\*</sup>, 即ち,  $S_{\mu}^{(t, t_0)}(\vec{x}(t_0)) = \vec{x}(t)$ . 又  $dS_{\mu}^{(t, t_0)}(\vec{x}_0(t_0, \mu))$  は,  $S_{\mu}^{(t, t_0)}$  の点

$\vec{x}_0(t_0, \mu)$  における微分である。ここで,  $dS_{\mu}^{(t_0+T, t_0)}(\vec{x}_0(t_0, \mu)) = d(M_{\mu}^{t_0})^m(\vec{x}_0(t_0, \mu))$

$\equiv d\psi_{\mu}$  の固有値  $\lambda_i(\mu)$ , 固有ベクトル  $\vec{e}_i(\mu)$ <sup>\*\*</sup> を考える。但し  $\lambda_i$  が実の場合を

考える。  $\vec{e}_i$  も実とする。

$$d\psi \vec{e}_i = \lambda_i \vec{e}_i. \quad (2.6)$$

$\vec{V}_i(t) = \frac{dS_{\mu}^{(t_0+t, t_0)} \cdot \vec{e}_i}{\|dS_{\mu}^{(t_0+t, t_0)} \cdot \vec{e}_i\|}$  とおき, 各時刻  $t$  で原点を  $\vec{x}_0(t)$  とすれば, 時間か

たつとともに,  $\vec{V}_i(t)$  は,  $\vec{x}_0(t)$  のまわりを回転していく。図37。

さて,  $\vec{x}_0(t)$  の近傍の flow の様子を記述するために

torsion number  $n_i$  を次のように定義する。

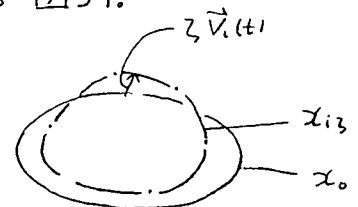


図37

\* 第1章で定義したストロホ・マップ  $M^{t_0}$  は,  $M^{t_0} = S_{\mu}^{(t_0+t_0, t_0)}$

\*\*  $\lambda_i$  は  $t_0$  によらないが  $\vec{e}_i$  は  $t_0$  により次のようになる。

$$\vec{e}_i(\mu)(t_0) = dS_{\mu}^{(t_0, 0)}(\vec{x}_0(0, \mu)) \vec{e}_i(\mu)(0)$$

以下簡単のため, 誤解の無い限り全2の表式から,  $\mu, t_0$  を除く。

$$\left. \begin{aligned} n_i &\equiv \frac{1}{2} L[\{\vec{x}_0(t); 0 \leq t < T\}, \{\vec{x}_0(t) + 3\vec{v}_i(t); 0 \leq t < 2T\}] \\ &\equiv \frac{1}{2} L(x_0, x_{i3}) \end{aligned} \right\} (2.7)$$

ここで、 $3 \ll 1$  とする。もし  $\vec{v}_i(t)$  が  $\dot{\vec{x}}_0(t)$  ( $\cdot$  は  $t$  による微分) と平行に近ければ

ければ、 $n_i$  は well-defined で、 $3$  が 充分小さいとき、一定の値に近づく。次に、

変分方程式 (2.4) の任意の解  $\vec{w}(t)$  に対して、relative torsion number  $r(\vec{w})$

を次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} r(\vec{w}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^T \frac{\alpha_2(t)\dot{\alpha}_3(t) - \dot{\alpha}_2(t)\alpha_3(t)}{\alpha_2(t)^2 + \alpha_3(t)^2} dt \\ \alpha_j(t) &= (\vec{w}(t), \vec{f}_j(t)) \\ \vec{f}_1(t) &= \frac{\dot{\vec{x}}_0(t)}{\|\dot{\vec{x}}_0(t)\|}, \quad \vec{f}_2(t) = \frac{\dot{\vec{x}}_0(t) \times \ddot{\vec{x}}_0(t)}{\|\dot{\vec{x}}_0(t) \times \ddot{\vec{x}}_0(t)\|}, \quad \vec{f}_3(t) = \vec{f}_1(t) \times \vec{f}_2(t) \end{aligned} \right\} (2.8)$$

$\alpha(t)$  を任意のスカラ関数としたとき  $r(a\vec{w}) = r(\vec{w})$  であるから、 $\vec{w}$  のかわりに

に規格化したベクトル  $\vec{v} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$  を用いてもよい。  $r(\vec{v})$  は  $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$  で

張られる部分空間への  $\vec{v}$  の射影  $\vec{v}_1$  の回転数、即ち  $\dot{\vec{x}}_0$  のまわりの変分ベク

トルの動座標系  $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$  に相対的な回転数である。図 38。

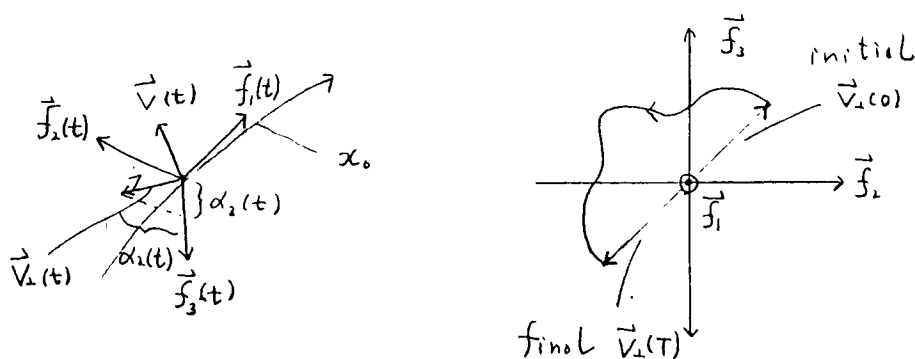


図 38

$\lambda_i$  に関連した量  $r_i$  を,  $r_i \equiv r(\vec{v}_i)$  と定義すると,  $n_i$  と  $r_i$  の関係は次式

(2.9) で与えられる。

$$n_i = r_i + L(x_0 + \gamma' f_2, x_0) \quad (*) \quad (\gamma' \ll 1) \quad (2.9)$$

以上の定義についての注意

1. 自律系 (即ち  $\vec{F}$  が時間によらない) の場合<sup>\*\*)</sup>

$\vec{x}_0(t)$  自身が変分方程式 (3) の解であり,  $d\psi$  の固有値  $\lambda_0 = +1$  に属する

固有ベクトルに $\vec{F}$  である。

$$d\psi, \vec{x}_0(t) = \lambda_0 \vec{x}_0(t) \quad (2.10)$$

従って, 他の実固有値  $\lambda_1, \lambda_2$  ( $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$ ) に対しては,  $n_1, n_2$  は常に

定義され, しかも  $n_1 = n_2, r_1 = r_2$  となる。なぜなら与えられた初期条件

をもつ (2.4) の解は一意的に定まるからである。<sup>\*\*\*)</sup> 更に 1103x-ターに

関する解の連続性も考慮に入れると, 実固有値の続く 1103x-ター領域

\* )  $L(x_0 + \gamma' f_2, x_0) \equiv L[\{\vec{x}_0(t) + \gamma' \vec{f}_2(t); 0 \leq t < T\}, \{\vec{x}_0(t); 0 \leq t < T\}]$ . 証明は付録Dをみよ。

\*\* ) (2.2) の解は時間並進対称性を持つ。 $\vec{x}(t)$  が解なら,  $s$  は任意の定数と

したとき  $\vec{x}(t+s)$  も解。

\*\*\* ) 解の反差は, 固定点以外では生じない。

で、 $n_1 (= n_2)$  は一定に等しい。

## 2. 非自律系

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  を  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$  で定義する。 $\vec{x}_0(t)$  は、もはや (2.4) の解ではなく、 $\vec{v}_i(t)$  は  $\vec{x}_0(t)$  と accidental に平行になり得る。もしある時刻  $t_0$  でそうなれば  $n_i$  は定義できないう。  $\lambda_i$  が実数でも、このような事の生じる 11° の X-ターの前後で  $n_i$  の値は変化し得る。

## 3 $\lambda_i \neq 0$

(2.11)

$\lambda_i \neq 0$  とする。 $\vec{w}_i(t) = dS^{(t_0+t, t_0)} \vec{e}_i$  であるが、

$$\vec{w}_i(\tau) = dS^{(t_0+\tau, t_0)} \vec{e}_i = d\psi \vec{e}_i = 0$$

又  $\vec{w} \equiv 0$  は (2.4) の解、よって、解の一意性より  $\vec{w}_i(t) \equiv 0$ 。

これは  $\vec{w}_i(0) = \vec{e}_i$  が固有ベクトル (≠ 0) であることに矛盾。

## 4. 容易にわかるように、 $n_i$ は $n_i$ が定義できるときはいつでも定義でき

$2n_i, 2r_i$  ともに、 $\lambda_i$  が正なら偶数であり、負なら奇数である。又、

$L(x_0 + \beta f_2, x_0)$  は、 $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$  が定義できる限りいつでも定義でき

$\beta \rightarrow +0$  のとき一定値であり、 $L(x_0 + \beta f_2, x_0)$  ( $\beta \ll 1$ ) に等しい。

簡単な場合の torsion number を 図 39 に示す.

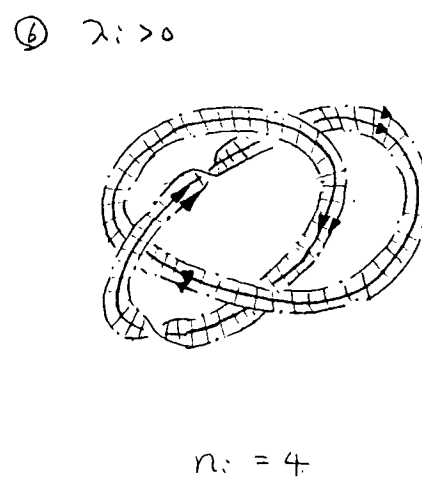
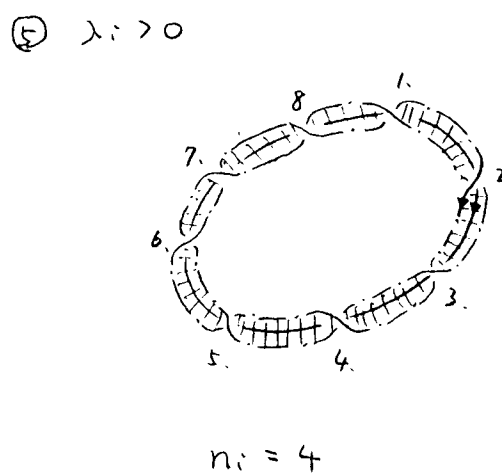
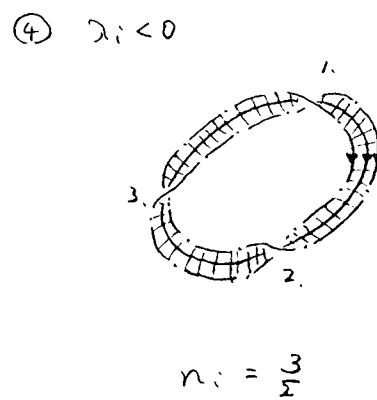
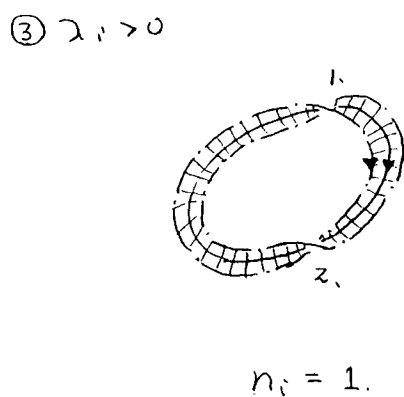
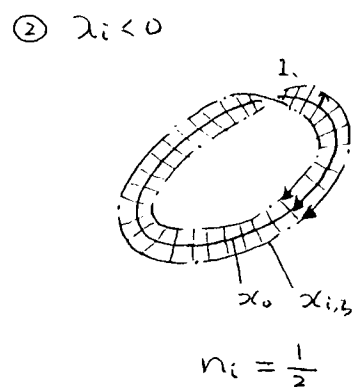
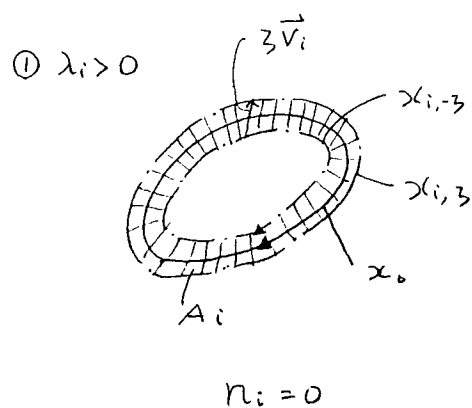


図 39.  $\lambda_i > 0$  のとき, 軌道は  $x_{i,3}$  上 に 2 周 する.

① ~ ⑤  $x_0$  は trivial knot

⑥  $x_0$  は  $T_{2,3}$

周期解  $\vec{x}_0(t)$  は、その「結び目型」と「torsion number  $n_1$ 」で位相的に特徴づけられ、更に  $\vec{x}_0(t)$  が分岐して  $\vec{x}_1(t)$  になるとき、 $\vec{x}_1(t)$  の「結び目型」と「torsion number  $n_1$ 」は、 $\vec{x}_0(t)$  の「結び目型」と「torsion number  $n_1$ 」で決まる。このことを次節で示す。

## 2-2 分岐過程における周期解の位相構造の変化

この節では、パラメータ  $\mu$  を変えていったとき、周期解が不安定化して、新しい周期解が現れる分岐過程において、新旧の解の位相構造の関係について議論する。そのために、実固有値  $\lambda_i$  に対して、周期解  $\vec{x}_0(t, \mu)$  のまわりのバンド  $A_i$  を次のように定義する。

$$A_i \equiv \{ \vec{x}_0(t) + s \vec{v}_i(t); 0 \leq t < T, -3 \leq s \leq 3 \} \quad (2.12)$$

バンド  $A_i$  は、自律系では、 $|\lambda_i| < 1$  のとき  $x_0$  の安定多様体<sup>\*)</sup>に、又  $|\lambda_i| > 1$  のときは、不安定多様体に接する。又、非自律系では、位相  $t_0$  のストロボ<sup>\*)</sup>  $M_{\mu}^{t_0}$  に対して、 $\vec{x}_0(t_0)$  は  $(M_{\mu}^{t_0})^m$  の固定点になっているが、 $A_i$  はその安定又は不安定多様体（各々  $W^s(t_0)$ ,  $W^u(t_0)$  とする）を束ねたもの、即ち  $\bigcup_{t_0 \in [0, T)} W(t_0)$

に接する。位相的にバンド  $A_i$  を特徴づける量は、その中心系、即ち  $x_0$

の結び目型と、<sup>\*\*) 1</sup> ‘ねじれ数’  $2n_i$  である。従って、周期解の位相的性質は、

結び目型と torsion number  $n_i$  で完全に規定される。  $\lambda_i$  が正、即ち  $2n_i, 2r_i$  が

\*)  $n_i$  が定義できる場合を考える。又、図39 参照。

\*\*) 数学的に、バンドの‘ねじれ数’というものが定義されていて、それは、この論文での torsion number の2倍である。

偶数のとき  $A_i$  は向きづけ可能であり、 $\lambda_i$  が負、 $2n_i, 2r_i$  が奇数のとき 向きづけ不可能である。

さて  $\mu$  を増加させていったとき、 $\mu = \mu_1$  で周期解が不安定になるとする。このとき generic に  $|\lambda_1(\mu_1)| = 1$ ,  $|\lambda_i(\mu_1)| < 1$  である。(但し  $i \neq 0$ )。つまり固有値が縮退しない ( $\lambda_0 = 1$  は別に(2)) と仮定する。 $\lambda_1$  が a) 正, b) 負, c) 複素数に応じて分岐のタイプが異なる。以下で各場合について最初に系を論述し、その後 バンド A の変化を議論することによって証明を行なう。

a)  $\lambda_1 = 1$  ピンチ フォーク分岐<sup>\*\*)</sup>

第 1 章でも述べたように、 $\lambda_1 = 1$  の分岐は、generic には サドル-ノード分岐であるが、系に対称性があり、 $\vec{x}_0(t, \mu)$  が対称な解の場合は、ピンチ フォーク分岐が可能である。つまり  $\mu_1 < \mu$  で不安定化した  $\vec{x}_0(t, \mu)$  の他に、新しい安定周期解  $\vec{x}'(t, \mu), \vec{x}''(t, \mu)$  が生じる。我々はこの場合を扱う。この時 次の事が成立する。

a) 表と裏を区別できる。

\*\*\*) 倍周期分岐のことではなく、新たに 2 つの解が生ずる分岐をここでは、

ピンチ・フォーク分岐とよび、



1. 解  $x', x''$  の周期は  $x_0$  の周期と同じであり、これら3つのうち任意の2つの

対の linking 数は  $n_i$  に等しい。即ち、

$$L(x_0, x') = L(x_0, x'') = L(x', x'') = n_i \quad (2.13)$$

2. torsion number, relative torsion number は次のようになる。

$$n'_i \quad n''_i \quad n_i \quad (2.14)$$

$$n'_i = n''_i = n_i \quad (2.15)$$

3.  $x'$  と  $x''$  の結び目型は  $x_0$  の結び目型と同じであり又 (2.14) より

torsion number も等しいので、バンド  $A'_i, A''_i$  は  $A_i$  と同じである。

b)  $\lambda_i = -1$ 、倍周期分岐

この場合は、 $\vec{x}_0(t, \mu)$  が不安定化して、周期が  $\vec{x}_0$  の2倍の安定周期解

$\vec{x}'''(t, \mu)$  が生ずる。このとき 次の事が成り立つ。

$$1. \quad L(x_0, x''') = 2n_i \quad (2.16)$$

$$2. \quad n_i''' = 2(n_i + n_i) \quad (2.17)$$

$$r_i''' = 2r_i \quad (2.18)$$

3.  $x'''$  の結び目型は  $x_{13}$  の結び目型に等しい。特に  $x_0$  が trivial

knot のときは、 $x'''$  は Torus knot  $T_{2, 2n_i}$  となる。又  $A_i'''$  は向きづけ可能。

$$c) \lambda_1 = e^{2\pi i \theta} \quad (\theta = \frac{n}{m}, m=1,2,3,4)$$

この場合は、 $\vec{x}_0(t, \mu)$  が不安定となり、2次元トーラス  $T^2$  上の周期解、

\*) 又は概周期解が、適当な条件のもとで生成される。前節で  $n_1$  は、

$\lambda_1$  が実数の場合にのみ定義したが、更に  $\theta = \frac{q}{p}$  ( $p, q$  は互いに素な

整数,  $p > 0$ ) のとき、 $n_1$  を次のように定義する。

$$n_1 \equiv \frac{1}{p} L(x_0, \tilde{x}_{13})^{**})$$

$$\tilde{x}_{13} \equiv \{ \vec{x}_0(t) + 3 \vec{v}_1(t), 0 \leq t < pT \}$$

$$\vec{v}_1(t) = \frac{dS(t_0+t, t_0) \vec{e}_1}{\|dS(t_0+t, t_0) \vec{e}_1\|}$$

$$\vec{e}_1, dS(t_0+pT, t_0) \text{ の固有値 } \lambda_1 = 1 \text{ に属する}$$

実固有ベクトル。

} (2.19)

すると、次の事が成立する。

1. トーラスは  $x_0$  と同じ '結び目型'

2.  $\theta = \frac{q}{p}$  のとき、周期  $pT$  の周期解  $x'''$  が生成されるが、 $x'''$  の

結び目型は、 $\tilde{x}_{13}$  の結び目型と等しく、 $x_0$  が trivial knot のとき、

$x'''$  は Torus knot  $T_{p,pn_1}$ 。

\*)  $\theta$  が有理数のとき周期解、無理数のとき概周期解。

\*\*) 後に一般の変分ベクトルに対して、定義を拡張する。

次に式 (2.13) ~ (2.18) の証明を行なう。<sup>\*</sup>

flow の近傍 のようすは、バンド  $A_i$  によって記述されているから、分岐が おこったとき  
 生じる新しい解のバンド  $A'_i$  も知ることがよい。  $\lambda_i = 1$  とおいて不安定化するのを、  
 バンド  $A_i$  に注目する。又、分岐は 連続的に おこる場合を考えているので、連続性  
 より 次の命題が成立する。

「分岐によって生じた解のバンド  $A'_i$  は、 $A_i$  を中心系より切断して得られる

バンドに等しい」

この命題を前提として証明を行なう。

[証明]

バンド  $A_i$  が与えられたとき、torsion number  $n_i$  は バンドの系数 ( $\lambda_i > 0$  のとき、  
 2つの閉曲線  $x_{i,1}, x_{i,2}$  であり、 $\lambda_i < 0$  のとき 1つの閉曲線  $x_{i,1}$  である) と、  
 中心系 (即ち  $x_0$ ) との linking 数  $\frac{1}{2}$  である。系数と中心系との交差は、4つの  
 タイプに分けられ、それぞれ  $n_i$  への寄与は、次のようになる。図 40。

---

\* C の結果は、殆ど明らかなので、特に証明は行なわれないう。

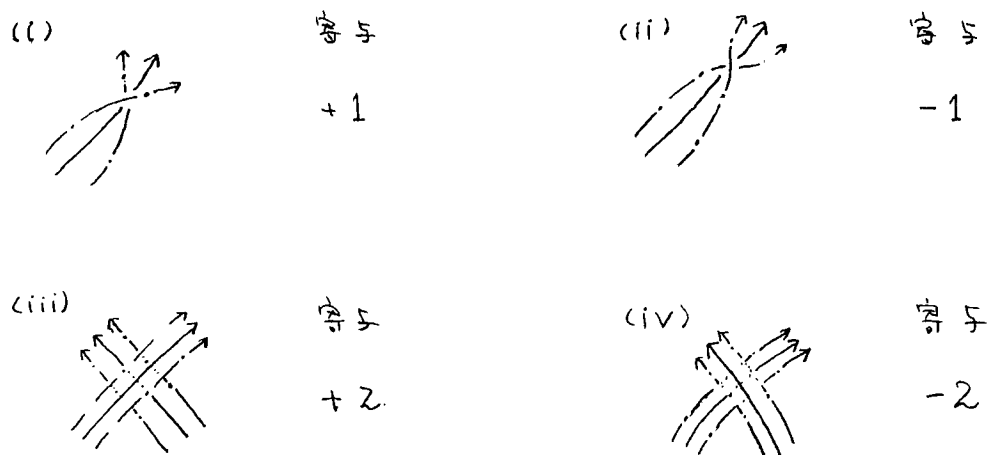


図 40 交差の4つのタイプと,  $n_i$ への寄与.

タイプ (i) ~ (iv) の個数を, それぞれ,  $l^+(i)$ ,  $l^-(i)$ ,  $m^+(i)$ ,  $m^-(i)$  とすると,

$$n_i = \frac{1}{2} (l^+(i) - l^-(i) + m^+(i) - m^-(i)) \quad (2.20)$$

$A_i$  が向きづけ可能な場合は, 更に次のようにする. タイプ (i), (ii) の交差で

線  $x_{i+3}$  が  $x_0$  の下にくる場合の個数を  $l_1^+(i)$ ,  $l_1^-(i)$ ,  $x_{i+3}$  が下にくる場合の

個数を  $l_2^+(i)$ ,  $l_2^-(i)$  とすると,

$$l^+(i) = l_1^+(i) + l_2^+(i), \quad l^-(i) = l_1^-(i) + l_2^-(i) \quad (2.21)$$

$$\left. \begin{aligned} n_i &= l_1^+(i) - l_1^-(i) + m^+(i) - m^-(i) \\ &= l_2^+(i) - l_2^-(i) + m^+(i) - m^-(i) \end{aligned} \right\} (2.21)$$

\* 例えは" p56 図 39 の⑥の例"では,  $l^+(i)=2$ ,  $m^+(i)=3$  であるから

$$n_i = \frac{2}{2} + 3 = 4.$$

又 (2.20) ~ (2.21) より

$$e_1^+(i) - e_1^-(i) = e_2^+(i) - e_2^-(i) = \frac{1}{2}(e^+(i) - e^-(i)) \quad (2.22)$$

となる。

さて、 $A_i$  と  $A_i'$  の関係について、まず  $i=1$  の場合、次に  $i \neq 1$  の場合を考察する。

### I. $A_1$ と分岐後のバンド $A_1'$ との関係

$A_1$  をその中心系に 3, 2 を切断すると (i), (iii) はそれぞれ次のようになる。図4。<sup>\*</sup>

#### a) の場合

新たに2つの周期解  $x', x''$ , 従って

バンド  $A_1', A_1''$  が生じ (i)' の各々は、 $A_1'$

$A_1''$  である。(ii)' も同様。(iii)', (iv)' につい

ては (iii), (iv) のタイプが各々  $A_1, A_1'$  に

属する。(例えば、図4 (iii)' で太線で囲

んだものと他方)。従って、

$$e^{\pm'}(1) - e^{\pm''}(1) = e^{\pm}(1)$$

$$m^{\pm'}(1) = m^{\pm''}(1) = m^{\pm}(1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} (2.23)$$

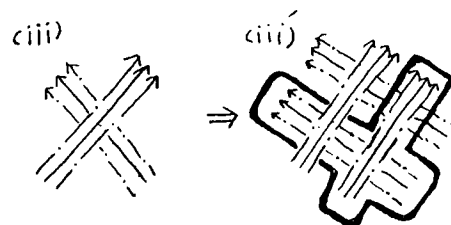
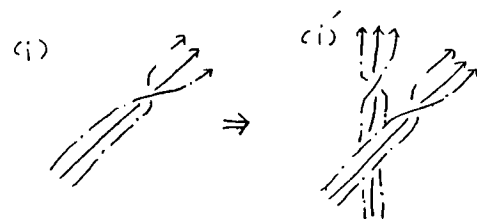


図 41

<sup>\*</sup>) ii), iv) も同様。

であり、 $n_1' = n_1'' = n_1$ でバンド  $A_1', A_1''$  は  $A_1$  と同じである。

次にリンク数も考える。 $x'$  に注目する。(i) ~ (iv) で  $x'$  が  $x''$  の下にくる場合の数を

$\ell_1^{\pm}(1), m_1^{\pm}(1)$  とすると、これは各々リンク数に  $(\pm 1), (\pm 1)$  の寄与をするから

$$\begin{aligned} L(x', x'') &= \ell_1^{+}(1) - \ell_1^{-}(1) + m_1^{+}(1) - m_1^{-}(1) \\ &= n_1 \quad ((2.21), (2.22) \text{より}). \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} L(x', x'') &= \ell_1^{+}(1) - \ell_1^{-}(1) + m_1^{+}(1) - m_1^{-}(1) \\ &= n_1 \end{aligned}} \right\} (2.24)$$

他のバンドについても同様である。<sup>\*</sup>

#### b) の場合

図 41 より、 $\ell^{\pm''' }(1) = 2\ell^{\pm}(1), m^{\pm''' }(1) = 4m^{\pm}(1) + \ell^{\pm}(1)$  であるから

$$\begin{aligned} n_1''' &= \frac{1}{2} \{ \ell^{+''' }(1) - \ell^{-''' }(1) \} + m^{+''' }(1) - m^{-''' }(1) \\ &= \ell^{+}(1) - \ell^{-}(1) + 4 \{ m^{+}(1) - m^{-}(1) \} + \ell^{+}(1) - \ell^{-}(1) \\ &= 4 \left[ \frac{1}{2} \{ \ell^{+}(1) - \ell^{-}(1) \} + m^{+}(1) - m^{-}(1) \right] = 4n_1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} n_1''' &= \frac{1}{2} \{ \ell^{+''' }(1) - \ell^{-''' }(1) \} + m^{+''' }(1) - m^{-''' }(1) \\ &= \ell^{+}(1) - \ell^{-}(1) + 4 \{ m^{+}(1) - m^{-}(1) \} + \ell^{+}(1) - \ell^{-}(1) \end{aligned}} \right\} (2.25)$$

又、リンク数については、 $\ell^{\pm}(1)$  個から  $(\pm 1), m^{\pm}(1)$  個から  $(\pm 2)$  の寄与があるから、

$$L(x_0, x''') = \ell^{+}(1) - \ell^{-}(1) + 2 \{ m^{+}(1) - m^{-}(1) \} = 2n_1 \quad (2.26)$$

となる。

\*  $n_i$  の変化については最後にまとめて証明する。

## II. $A_i$ と分岐後のバンド $A_i'$ との関係 ( $i \neq 1$ )

この場合には、 $A_1$  と  $A_i$  との位置関係を考慮しなければならぬ。それについて

は、図42の6つの場合が考えらる。<sup>\*</sup> 各々は、分岐後、矢印で示した図になる。

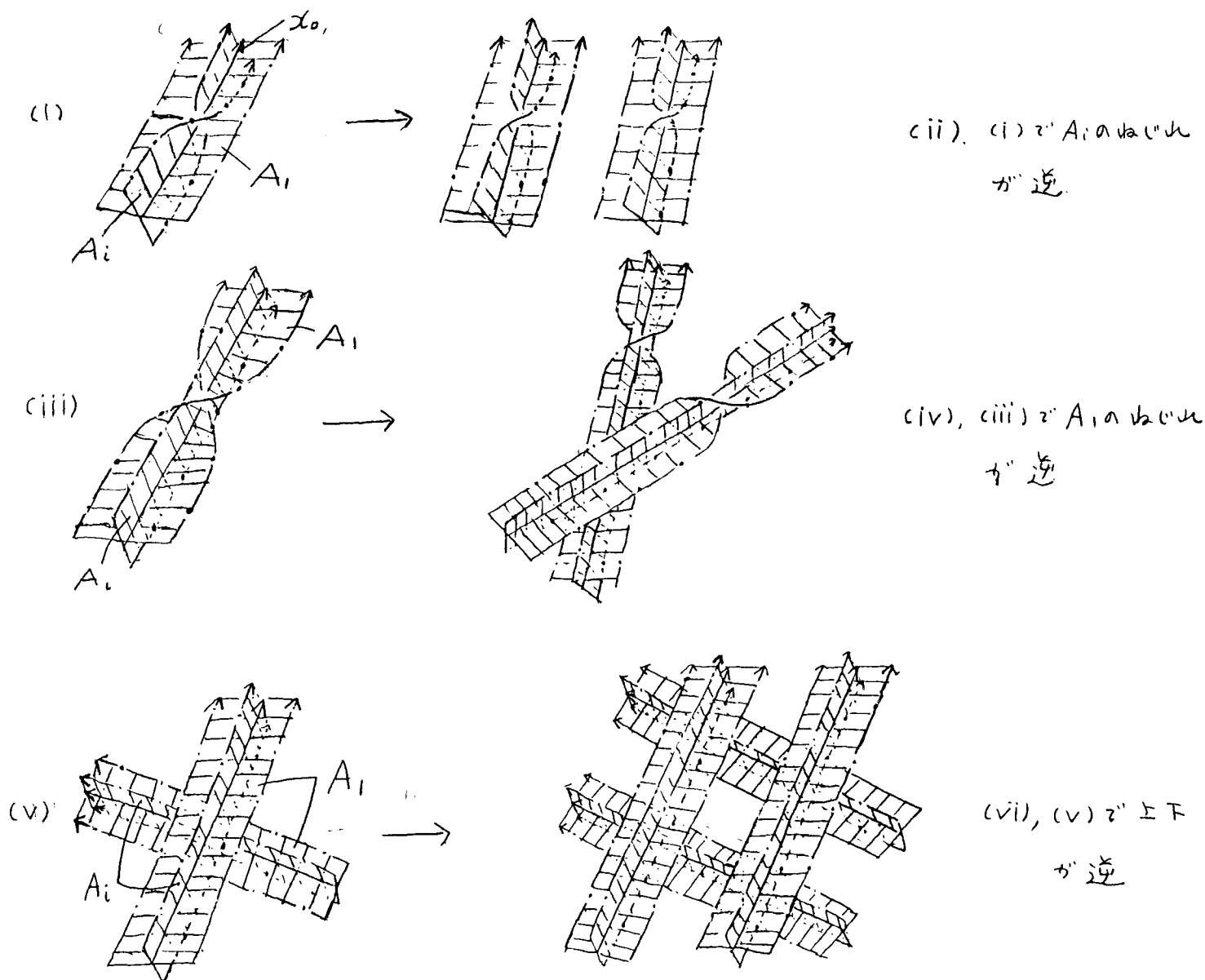


図 42

\* 適当な方向からみれば、他の組み合わせを避けることができる。

要するにバンド  $A_i$  は、2枚に「ひきはがされる」。図 42 で (i) ~ (vi) の場合の個数はそれぞれ  $\ell^\pm(i), \ell^\pm(1), m^\pm(i) = m^\pm(1)$  である。さて a), b) の場合を別々に言明する。

(a) の場合

$A_i$  と全く同じバンド  $A'_i, A''_i$  ができるのは明らか。従って  $n'_i = n''_i - n_i$ 。

(b) の場合

図 42 より  $\ell^\pm(i) = 2\ell^\pm(i), m^\pm(i) = 4m^\pm(i) + \ell^\pm(1)$  であるから、

$$\begin{aligned} n_i''' &= \frac{1}{2} \{ \ell^{+'''}(i) - \ell^{-'''}(i) \} + m^{+'''}(i) - m^{-'''}(i) \\ &= \ell^+(i) - \ell^-(i) + 4 \{ m^+(i) - m^-(i) \} + \ell^+(1) - \ell^-(1) \\ &= \ell^+(i) - \ell^-(i) + 2 \{ m^+(i) - m^-(i) \} + \ell^+(1) - \ell^-(1) + 2 \{ m^+(1) - m^-(1) \} \\ &= 2n_i + 2n_1 = 2(n_i + n_1) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} n_i''' &= \frac{1}{2} \{ \ell^{+'''}(i) - \ell^{-'''}(i) \} + m^{+'''}(i) - m^{-'''}(i) \\ &= \ell^+(i) - \ell^-(i) + 4 \{ m^+(i) - m^-(i) \} + \ell^+(1) - \ell^-(1) \\ &= \ell^+(i) - \ell^-(i) + 2 \{ m^+(i) - m^-(i) \} + \ell^+(1) - \ell^-(1) + 2 \{ m^+(1) - m^-(1) \} \\ &= 2n_i + 2n_1 = 2(n_i + n_1) \end{aligned}} \right\} (2.27)$$

さて次に  $n_i$  の変化を言明する。(i は 何でもよい)。

(a) の場合

$$n_i = n_i + L, \quad n'_i = n'_i + L', \quad n_i = n'_i \quad (2.28)$$

が成立してゐるから、今後は連続的に生じるので  $L = L'$  である。



従って (2.28) より  $r_i = r_i'$ 。

(b) の場合

$$n_i = r_i + L, \quad n_i''' = r_i''' + L''', \quad n_i''' = 2(n_i + n_i') \quad (2.29)$$

が成立している。又、 $L = L(x_0 + 3'f_2, x_0)$  であり、分岐は連続的におこるから、

バンド  $B_2$

$$B_2 = \{ \vec{x}_0(t) + s \vec{f}_2(t); 0 \leq t < T, -3' \leq s \leq 3' \} \quad (2.30)$$

に対しても、 $A_i$  と同じ議論が成り立つ。つまり  $\vec{f}_2$  に対応する torsion number

を  $\tilde{n}$  とすれば定義より  $\tilde{n} = L$  である。又、分岐後のバンド  $B_2'''$  についても

同様に、 $\tilde{n}''' = L'''$ 。従って  $\tilde{n}'''$  を導いたときと同様の議論より

$$\tilde{n}''' = 2(\tilde{n} + n_i) \quad \text{つまり} \quad L''' = 2(n_i + L) \quad (2.31)$$

(2.29), (2.31) より

$$\begin{aligned} r_i''' - r_i &= n_i''' - L''' - (n_i - L) = 2(n_i + n_i') - 2(n_i + L) - (n_i - L) \\ &= n_i - L = r_i \end{aligned} \quad (2.32)$$

即ち  $r_i''' = 2r_i$  ..

以上で証明を終える。

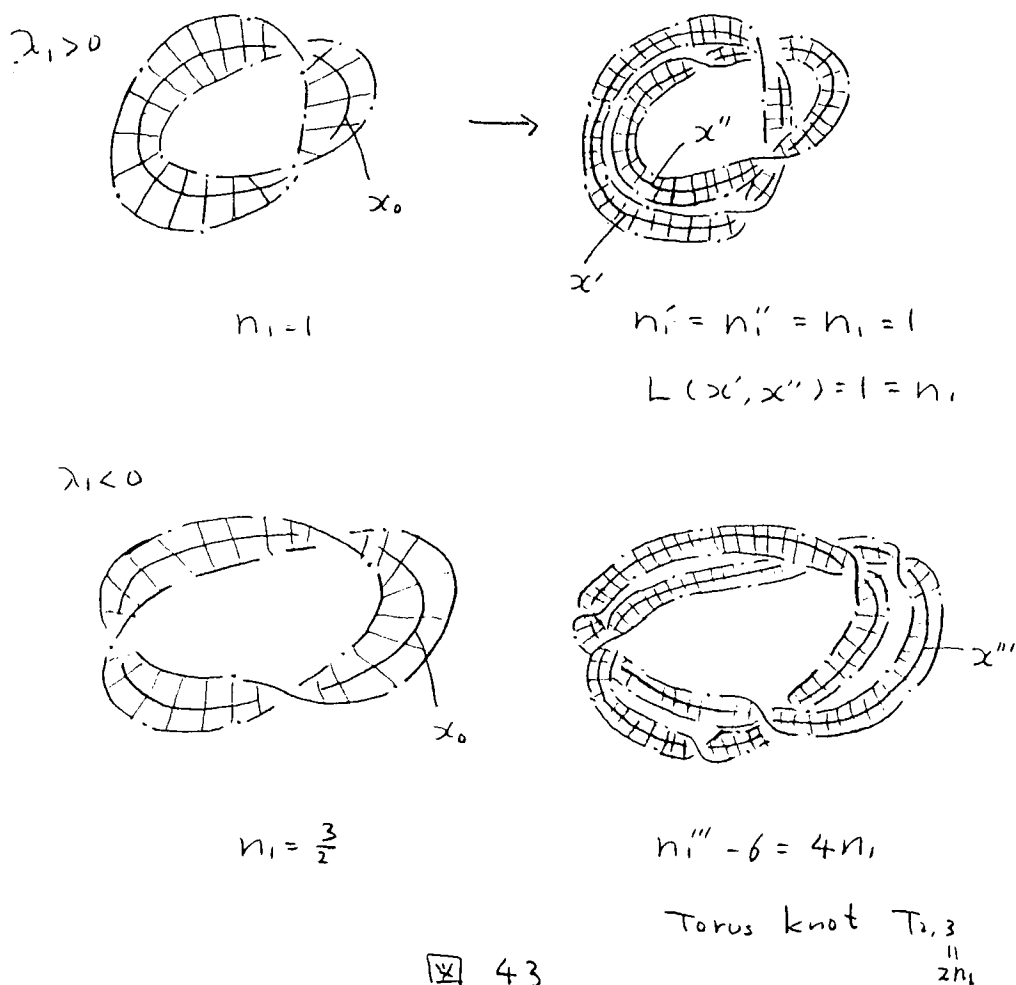
コメント 自律系の場合は,  $n_1 = n_2$ ,  $r_1 = r_2$  であるから

$$\left. \begin{aligned} a) \quad n_i' = n_i'' = n_i = n_1 \\ r_i' = r_i'' = r_i = r_1 \end{aligned} \right\} (2.33)$$

$$\left. \begin{aligned} b) \quad n_i''' = 2(n_1 + n_i) = 4n_1 \\ r_i''' = 2r_i = 2r_1 \end{aligned} \right\} (2.34)$$

とある。

図43に 簡単系 例を示す。



又、表 4 に 強制ローレンツ モデル  $(10.5), (11.1)$  の 数値計算の結果を

示す。これは、これまでの結論を例証している。

period	$1T_0$	$2T_0$		$4T_0$		$8T_0$		$16T_0$
$A$ : parameter	114.9	115.0	116.16	116.19	116.368	116.376	116.41	116.412
$r_1$	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	-1
$\Delta r_1$		$-\frac{3}{2}$		$+\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		
$r_2$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-3	$-\frac{3}{2}$	-3
$\Delta r_2$		$-\frac{1}{2}$		$+\frac{1}{2}$		$-\frac{3}{2}$		
$n_1$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{7}{2}$	14	$\frac{25}{2}$	50	$\frac{101}{2}$	202
$n_2$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	12	$\frac{23}{2}$	48	$\frac{99}{2}$	200
$L(x_0 + \xi' f_2, x_0)$	1	3	3	13	13	51	51	203
Knot type	trivial	trivial		$T_{2,2}$		*		*

表 4.  $T_0 = \frac{2\pi}{B}$  ( $=T_F$ ),  $\Delta r_i = r_i(i) - r_i(f)$

$r_i(i)$ ,  $r_i(f)$  は, 固有値が正, 負のとき  $r_i$  の値

イタリック体の部分は,  $n_i = n_i + L$  より計算.

\* 部分は 1 周毎 2 回あり.

### 2-3. 倍周期分岐のカスケード現象(2<sup>n</sup>分岐)の領域における周期解の位相

#### 構造の successive な変化

この節では 2<sup>n</sup>分岐が生じているパラメータ領域での torsion number  $n$ , relative torsion number  $r_i$  の変化について議論する。3次元 flow 系においても、1次元写像  $x_{n+1} = f(x_n, \lambda)$  の場合の 2<sup>n</sup>分岐のメカニズムと同様な現象が生じるので、まず 1次元写像について考える。<sup>\*</sup> 2<sup>k</sup>周期解の onset point を  $\tilde{\lambda}_k$  とし, critical point  $\bar{x}$  が 2<sup>k</sup>周期解にある場合 (super stable point) を  $\lambda_k$  とすれば、写像  $f^{2^k}$  は、図44のように変化していく。

$\bar{x}$  に一番近い 2<sup>k</sup>周期点を

$x_0^{(k)}$  とすれば、①~③では、

$x_0^{(k)}$  は左向きに動き、 $\bar{x}$  を

横切ることにより、傾きは  $\frac{d}{d\lambda} f^{2^k}(x_0^{(k)}, \lambda)$

が正から負に変化し、 $\lambda = \tilde{\lambda}_{k+1}$

で 2<sup>k+1</sup>周期解が安定な解

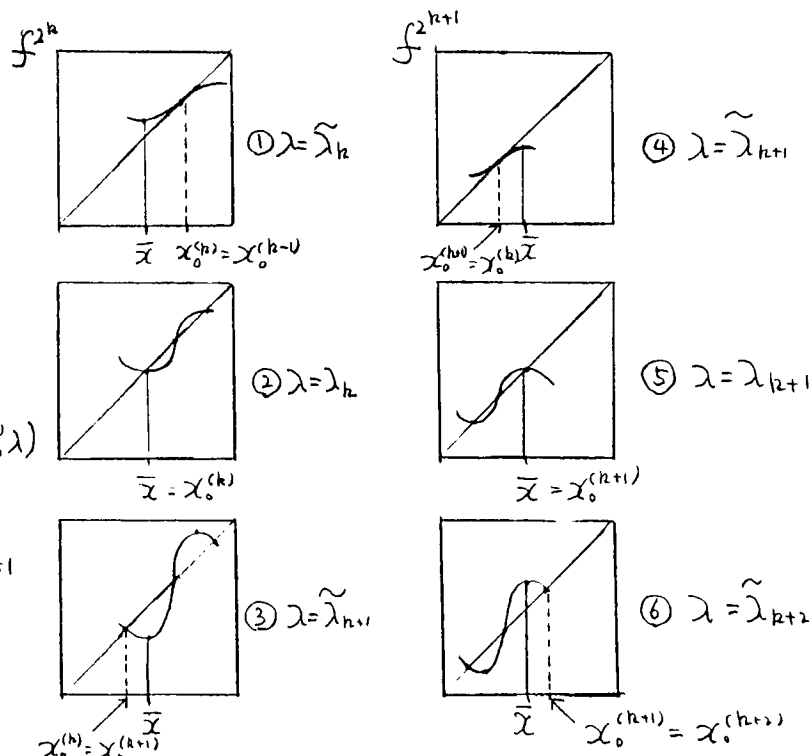


図 44

\* ) P13 参照。

として現われる。次に④～⑥では、 $\alpha_0^{(h)}$  は、今度は右向きに動き、 $\alpha$  を横切

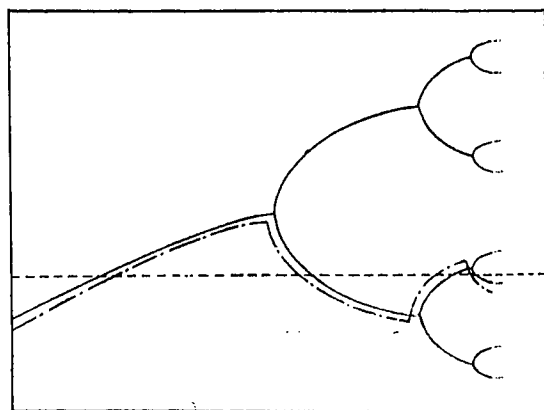
\*)  
る。このプロセスが繰り返されることにより、 $2^k$  分岐が生じる。図 45。

次に 3次元 flow 系を考える。 $\mu_k$  を

周期  $T^{(k)}$  の周期解の onset point

とする。このとき、 $dS^{(t_0+T^{(k)}, t_0)} \equiv dM^{(k)}$  \*\*)

の固有値  $\lambda_1^{(k)}$  は、 $\lambda_1^{(k)}(\mu_k) = +1$  で



あり torsion number  $n_1^{(k)}(\mu_k)$  は 整数

である。この解が倍周期分岐を生ずる

ためには、 $\lambda_1^{(k)}(\mu_{k+1}) = -1$  と仮定する

図 45. 1点分岐系,  $\alpha_0^{(k)}$

実線,  $\alpha_1^{(k)}$

点線, critical point  $\alpha$   
縦軸, 座標  $\alpha$

横軸 パラメータ  $\mu$

なう” (2.11) の如く  $\lambda_i \neq 0$  であるから、 $\lambda_1^{(k)}(\mu)$  は あるいはパラメータ領域

で複素数になり、実部が 正  $\rightarrow$  0  $\rightarrow$  負 と変化する。よって、 $\lambda_1^{(k)}$  は 負の

実数となる。(図 16, 17 参照)。  $2n_1^{(k)}(\mu_{k+1} - 0)$  は 奇数 である。さてこれから

は 3次元自律系 又は 2次元非自律系 (但し時間に関して周期的とする。

\*) スケール因子  $\alpha$  が 負 であることと関連する。

\*\*)  $2^k$  周期解が 安定な領域 での 量は 全て 文字  $(k)$  をつける。

これは、3次元空間  $T^1 \times R^2$  上の自律系とみなせる)に話を限る<sup>\*)</sup>

$\lambda_1^{(k)}$  が複素数になるパラメータ領域<sup>\*)</sup>では軌道のまわりのベクトル場は

回転的 (即ち  $M^{(k)}$  でみればフォーカス) である。このとき固有ベクトルの実部

或は虚部は  $T^{(k)}$  時間後にもとに戻らずある角度だけ回転する。そして、

$\lambda_1^{(k)} < 0$  の領域で半回転する。この変化を記述するために rewinding number

$\Delta n_1^{(k)}$  を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \Delta n_1^{(k)} &= n_1^{(k)}(i) - n_1^{(k)}(f) \quad ***) \\ &= r_1^{(k)}(\mu_k + 0) - r_1^{(k)}(\mu_{k+1} - 0) + L^{(k)}(\mu_k + 0) - L^{(k)}(\mu_{k+1} - 0) \quad (2.35) \\ &\equiv \Delta r_1^{(k)} + \Delta L^{(k)} \end{aligned}$$

このとき、次式が成立する。

$$\Delta n_1^{(k)} = (-1)^k \frac{\ell}{2} \quad \ell \text{ はある整数} \quad (2.36)$$

これは、次のように考えることができる。

\*) 3次元非自律系は本質的に4次元であり、今のところ3次元以上

の系では位相的性質を記述する適当な量を見出してはいない。但し

3次元非自律系でも、ここまでの議論は妥当である。

\*\*)  $\lambda_1^{(k)} > 0$  のとき  $n_1^{(k)}(i)$ ,  $\lambda_1^{(k)} < 0$  のとき  $n_1^{(k)}(f)$  とする。P54 注意1参照。

2<sup>nd</sup> order bifurcationが生じているパラメータ領域では flowのようすは、近似6%に  
'Paper Sheet Model'<sup>57)</sup>で記述することができる。図46。

線分ABは引き伸ばされて折りたたまれ

もとの線分上に重ねられる。従ってこれは一枚の

Sheetではなく無限個のSheetが重なっている。

重なりを無視すればABからABへの写像は、

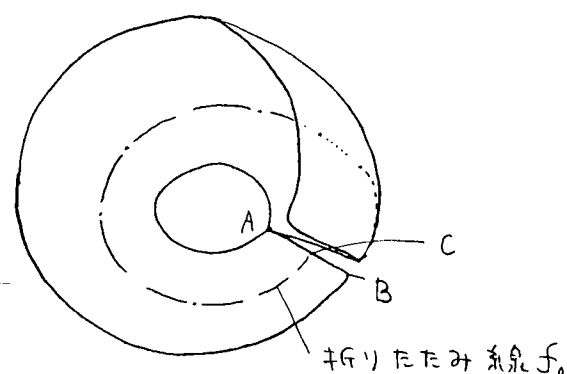


図46. Paper Sheet Model

図47のようになる。critical point Cが

折りたたみ線  $f_0$  に対応する。1次元の場合

と同様に 周期解  $x^{(k)}$  と  $f_0$  との位置関係

が接空間の様子。即ち固有値  $\lambda_1^{(k)}$  の

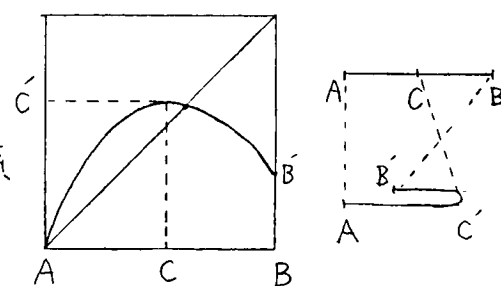


図47

タイプを決める。1次元の場合の山の高さの変化は折りたたむ位置の変化

に対応し それにより周期解と折りたたみ線  $f_0$  の位置関係が変化して、

安定性が変化する。<sup>\*</sup>例えば 図48の左上から右上へ変化する途中で

周期解が  $f_0$  を横切ることがそのとき 完全な折りたたみではないことを反映

<sup>\*</sup>) 或いは、周期解の半径が単調に増大していくと考えられることもできる。従って

周期はのびる。数値計算では、確かにそうになっている。

して、これに対応するパラメータの近傍では  
 $\lambda_1^{(k)}$  は複素数になり local な flow は  
回転的になる。この領域の前後で、固有  
ベクトルは sheet に対して  $2\pi \frac{\ell}{2}$  だけ  
回転する。分岐がおこった後 新しい解

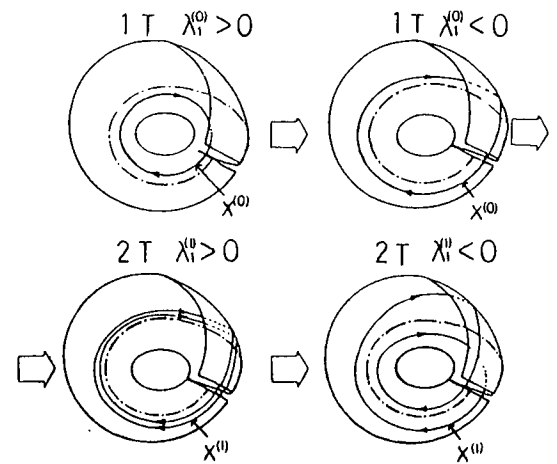


図 48

$x^{(k+1)}$  と  $f_0$  との相対間隔は狭まり、図 48

の下半分から明かかなように 上半分とは逆向きに  $f_0$  を通過し、その前後で、

$e_1^{(k+1)}$  は  $-2\pi \frac{\ell}{2}$  だけ回転する。図 49。この繰り返り返しにより、rewinding

number の符号変化 (2.36) が実現される。

$\ell$  の値は系の大域的構造を反映している、

即ち折りたたみ構造の正味の数(つまり、

Sheet の折りたたみか 運動方向に対して、右ね

じのとき正、左ねじのとき負としたとき、それら

の総和) に等しい。generic には  $|\ell| = 1$  である。

さて、 $n_1^{(k)}(i)$  と  $n_1^{(k-1)}(f)$  の関係は (2.34) より、

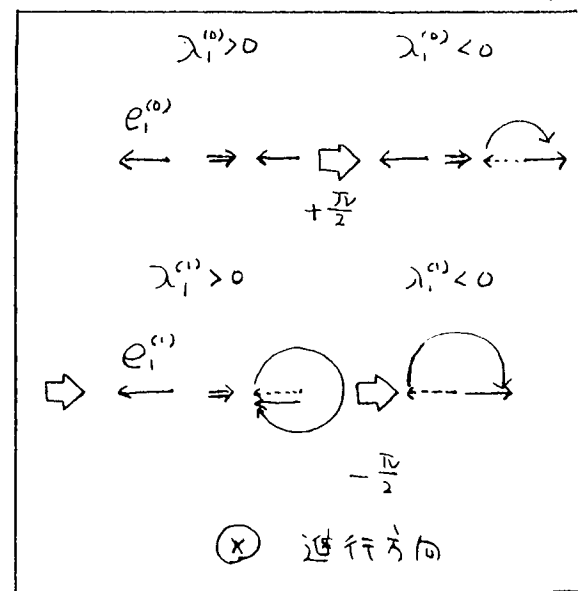


図 49



$$n_i^{(h)}(i) = 4 n_i^{(h-1)}(f) \quad (2.37)$$

(2.36), (2.37) を解くと一般解が次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} n_i^{(h)}(i) &= T_h^2 \left[ n_i^{(0)}(i) - \frac{2\ell}{5} + \left(-\frac{1}{4}\right)^k \frac{2\ell}{5} \right] \\ n_i^{(h)}(f) &= T_h^2 \left[ n_i^{(0)}(i) - \frac{2\ell}{5} - \left(-\frac{1}{4}\right)^k \frac{\ell}{10} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

更に  $\Delta L^{(h)} = 0$  を仮定すれば\*)

$$\left. \begin{aligned} r_i^{(h)}(i) &= T_h \left[ r_i^{(0)}(i) - \frac{\ell}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{\ell}{3} \right] \\ r_i^{(h)}(f) &= T_h \left[ r_i^{(0)}(i) - \frac{\ell}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{\ell}{6} \right] \\ L^{(h)} &= T_h \left[ T_h (n_i^{(0)}(i) - \frac{2\ell}{5}) - r_i^{(0)}(i) + \frac{\ell}{3} \right] + (-1)^k \frac{\ell}{15} \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

と得る。ここで  $T_h = 2^h$ 。(2.38), (2.39) から  $2^h$  分岐の際の  $n_i, r_i$  の一般規則で

ある。次に mean relative torsion number  $\langle r_i \rangle$  を次のように定義する。

$$\langle r_i \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_h} r_i^{(h)}(i) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_h} r_i^{(h)}(f) = r_i^{(0)}(i) - \frac{\ell}{3} \quad (2.40)$$

又 mean torsion number  $\langle n \rangle$  は

\*)  $2^k$  周期解と  $2^{k-1}$  周期解の安定領域の比は  $1/\delta$  で  $\delta \approx 4.669$  である

から倍周期分岐が進んでゆくと、 $2^k$  周期解の安定領域は著しく小さく

なり、2 倍。又、 $2^h$  分岐のとき、系の大域的な位相構造は Paper Sheet Model

で近似され、110° X-ターを変えても殆んど変化しない。以上より、ある  $k_0$  以上

で  $\alpha^{(k)}$  の形状変化は殆んどなく従って  $L^{(k)}$  は変化しない。簡単のため  $k_0 = 0$  とした。

$$\langle n \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_k} n_i^{(k)}(i) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_k} n_i^{(k)}(f) = n_i^{(0)}(i) - \frac{2\ell}{5} \quad (2.41)$$

で定義される。2<sup>nd</sup>分岐集積後はカオスになると考えられ、従って  $\langle n \rangle$  は、アトラクター上の軌道が、アトラクターを1周する間に、その接ベクトルの軌道に相対的な平均回転数を与える。又  $\langle n \rangle$  は、軌道とその接ベクトルのつくる軌道との平均周期当りの平均のリンク数である。これらの量はより一般的に定義されるが、それは後の節 (2-5) で行おう。

## 2-4. 数値計算 その1 (周期解領域)

この節では、2次元非自律系、3次元自律系における数値計算の結果を示す。

具体的には a) 強制ブラッセレイター<sup>53)</sup> b) オリジナルローレンツモデル

c) Rössler モデル<sup>58)</sup> において 2分岐の生じるパラメータ領域で、 $n_i$ ,  $n_c$ ,  $L$  を調べた。

a) 強制ブラッセレイター 表5

方程式は

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x = x^2 y - (1+B)x + A + a \cos \omega t \\ \frac{d}{dt} y = -x^2 y + Bx \end{cases} \quad (2.42)$$

であり、 $a=0.05$ ,  $A=0.4$ ,  $B=1.2$  とし、 $\omega$  をパラメータに選んだ。

又  $\vec{f}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{f}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{f}_3 = (0, 0, 1)$  とした。<sup>\*</sup> 表5でイタリック体の

の数字は、関係式  $n_i = r_i + L$  から計算した値である。<sup>\*\*</sup>

$\omega = 0.7$  では、 $n_c = -\frac{3}{2}$  であるので倍周期分岐で Torus knot  $T_{2,3}$

が生ずる。図50。  $\omega$  を上げてゆくと  $\omega \approx 0.7878$  でカオスになる。

\* ) 座標は  $(t, x, y)$ 。

\*\* ) b), c) においても同様。

この場合は,  $\ell=1$ ,  $r_1^{(0)}(i)=-1$ ,  $r_1^{(0)}(f)=-2$  であり,  $\langle r_1 \rangle = -\frac{1}{3}$ ,  $\langle r_1 \rangle = -\frac{2}{5}$

となる。つまり アトラクター上での軌道のまわりの周期 ( $T_F \frac{2\pi}{\omega}$ ) 当りの

平均回転角は  $-2\pi \cdot \frac{1}{3}$  (ラジアン) であり, 接ベクトルとの平均リンク数は

$-\frac{2}{5}$  である。又, 正味の折りたたみの回数は 1 回である。( $\ell=1$ )

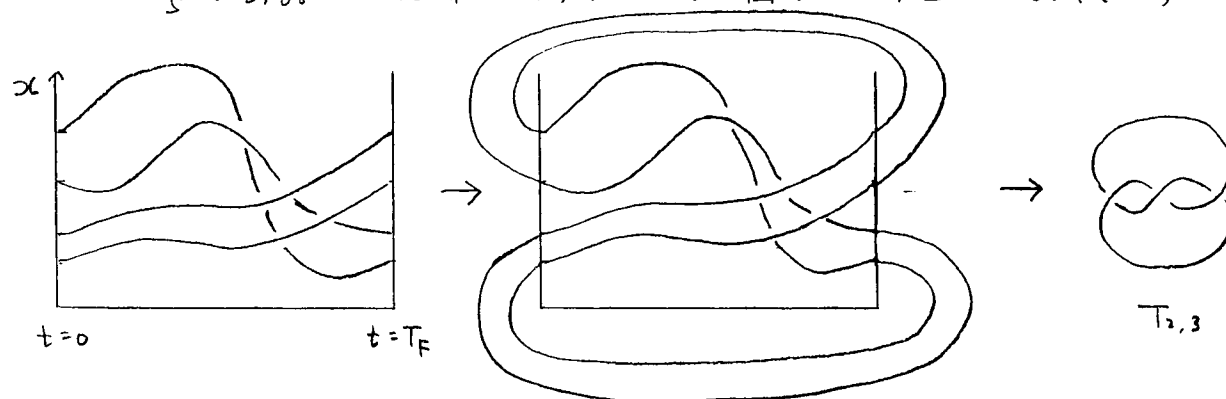


図 50  $\omega = 0.72$

	$k=1$		$k=2$		$k=3$		$k=4$	
	$\omega = 0.6(i) \ \omega = 0.7(f)$		$\omega = 0.72(i) \ \omega = 0.76(f)$		$\omega = 0.772(i) \ \omega = 0.782(f)$		$\omega = 0.7847(i) \ \omega = 0.7866(f)$	
$n_1^{(k)}$	-2	-3/2	-6	-13/2	-26	-51/2	-102	-205/2
$r_1^{(k)}$	-1	-1/2	-1	-3/2	-3	-5/2	-5	-11/2
$\Delta r_1^{(k)}$	-1/2		1/2		-1/2		1/2	
$L^{(k)}$	-1	-1	-5	-5	-23	-23	-97	-97
knot type	trivial		$T_{2,3} = \text{trefoil}$					
	$k=5$		$k=6$		$k=7$			
	$\omega = 0.787(i) \ \omega = 0.7874(f)$		$\omega = 0.7876(i) \ \omega = 0.78767(f)$		$\omega = 0.787705(i) \ \omega = 0.78772(f)$			
$n_1^{(k)}$	-410	-819/2	-1638	-3277/2	-6554	-13107/2		
$r_1^{(k)}$	-11	-21/2	-21	-43/2		-85/2		
$\Delta r_1^{(k)}$	-1/2		1/2		-1/2			
$L^{(k)}$	-399	-399	-1617	-1617	-6511	-6511		

表 5  $\Delta r_1^{(k)} \equiv r_1^{(k)}(i) - r_1^{(k)}(f)$

b) オリジナル・ローレンツ・モデル 表6

方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= -\sigma(x-y) \\ \frac{d}{dt}y &= rx - y - xz \\ \frac{d}{dt}z &= xy - bz \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

である。  $\sigma=16$ ,  $b=4$  とし,  $r$  をパラメータと選んだ。この系は  $r=\infty$  で

保存系である。  $r \approx 493$  では 対称なリミットサイクルが安定であり

それは trivial knot で  $n_1=1$ ,  $r_1=1$ ,  $L=0$  である。  $r \approx 493$  で

ヒッチコック分岐を おこして 2つの解が生じ、各々は 互いに他の

対称解に対応している。  $n'_1=1$ ,  $r'_1=1$ ,  $L'=0$  であり、分岐後も

trivial knot。互いのリンク数は 1 である。パラメータを下げて

ゆくと  $r \approx 420$  で 周期解の形状が 対称な形からかなりはずれ

$L$  が 0 から 1 になる。ところが  $n_1$  は固有値が実数の間は不変で

あるから 1 のまま、従って  $n_1=r_1+L$  より  $r_1=0$  となる。  $r$  が

420 以下で 2分岐が生じ  $L^{(2)}$  は 2周期分岐域で一定になる。

$r \approx 400$  で rewinding が生じて  $n_1=\frac{1}{2}$ ,  $r_1=-\frac{1}{2}$ ,  $L=1$  となり  $\Delta n_1=\Delta r_1$

$=\frac{1}{2}$  である。  $r \approx 360$  で 最初の倍周期分岐が生じるが、2周期解

は  $T_{2,1}$  即ち trivial knot である。  $r = 340$  では  $n_1 = \frac{5}{2}$  となるため 2 回目  
の倍周期分岐後始めて trivial ではない結び目を持つ周期解が生  
じる。 その結び目型は Torus knot  $T_{2,n_1}$   $T_{2,5}$  (図 51) で それ以後、  
ますます複雑な結び目に移行していく。  $r$  を更に減少させると  $r \approx 333.0$   
で非対称カオスになる。<sup>\*</sup> 今の場合、 $\ell = 1$ ,  $r_1^{(0)}(i) = 0$ ,  $n_1^{(0)}(i) = 1$  で  
あるから  $\langle r_1 \rangle = -\frac{1}{3}$ ,  $\langle n_1 \rangle = \frac{3}{5}$  となる。 正味の折りたたみ数は 1。

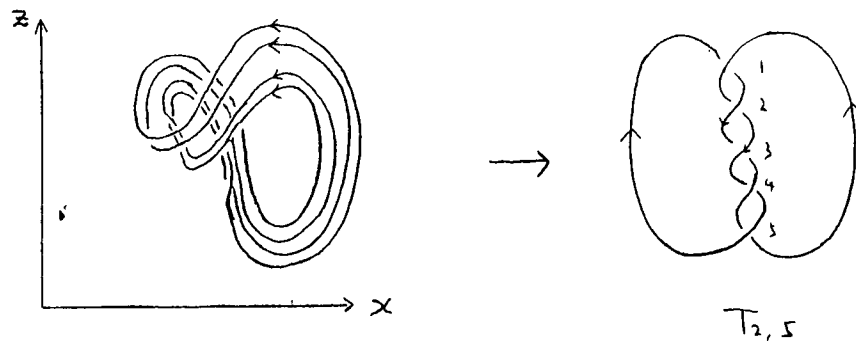


図 51  $r = 334.5$  (4 周期解)

	(s)		(a)	$k = 0$ (a)			$k = 1$ (a)		$k = 2$ (a)	
	$r = 600$	$r = 500$	$r = 480$	$r = 420$ (i)	$r = 400$ (f)	$r = 360$ (f)	$r = 356$ (i)	$r = 340$ (f)	$r = 388$ (i)	$r = 334.5$ (f)
$n_1^{(k)}$	1	1	1	1	1/2	1/2	2	5/2	10	19/2
$r_1^{(k)}$	1	1	1	0	-1/2	-1/2	-1	-1/2	-1	-3/2
$\Delta r_1^{(k)}$				1/2			-1/2		1/2	
$L^{(k)}$	0	0	0	1	1	1	3	3	11	11
knot type	trivial			trivial			trivial		$T_{2,5}$	
	$k = 3$ (a)			$k = 4$ (a)						
	$r = 334$ (i)	$r = 333.5$ (f)	$r = 333.4$ (i) $r = 333.3$ (f)							
$n_1^{(k)}$	38	77/2	154	307/2						
$r_1^{(k)}$	-3	-5/2	-5	-11/2						
$\Delta r_1^{(k)}$		-1/2	1/2							
$L^{(k)}$	41	41	159	159						

表 6 (s): 対称解 (a): 非対称解

\*). これについては 2-7 節で再びとりあげる。

(c) Rössler モデル 表 7

方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} x &= -(y+z) \\ \frac{d}{dt} y &= x + ey \\ \frac{d}{dt} z &= f + (x-\mu)z \end{aligned} \right\} (2.44)$$

但し  $e=f=0.2$   $\mu$  が 11.0 の  $x$ -ター。表 7 より、 $l=1$ ,  $h_1^{(0)}(i)=0$ ,

$h_1^{(0)}(i)=0$  であるから  $\langle n_1 \rangle = -\frac{1}{3}$ ,  $\langle n_1 \rangle = -\frac{2}{5}$  となり、正味の折りたた

み数は 1。この系は 始め  $n_1, h_1, L$  が全 20 であり、最も '簡単な'

位相構造を持つと考えると 事実。S.A の phase portrait

も単純であり、Paper Sheet Model (図 46, 48) と殆ど同じである。

図 52.

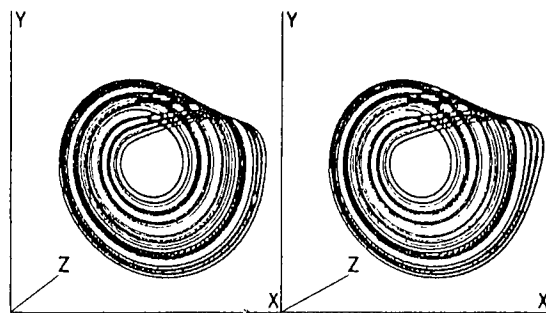


図 52. Stereoscopic Phase Portrait  
 $\mu=5.7$  (文献'58)より).

$k$	0		1		2		3		4	
$\mu$	1.0	2.6	3.0	3.5	3.9	4.1	4.15	4.18	4.19	4.2
$n_1^{(k)}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-6	$-\frac{13}{2}$	-26	$-\frac{51}{2}$	-102	$-\frac{205}{2}$
$r_1^{(k)}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	-3	$-\frac{5}{2}$	-5	$-\frac{11}{2}$
$\Delta n_1^{(k)}$		$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
$\Delta r_1^{(k)}$		$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
$L^{(k)}$	0	0	-1	-1	-5	-5	-23	-23	-99	-99
knot type	trivial		trivial		$T_{2,3}$		*		*	

表 7

以上 a), b), c) の計算結果は、全 2 前節までの結論を例証している。



### 2-5. ストレージ アトラクターの位相的特徴づけ

ここでは、3次元非自律系の場合も含めて議論する。

まず アトラクター上の2つの軌道のからみあいと記述するために Gauss formula

を用いて二つの軌道にまで拡張して、時刻  $T_1, T_2$  までの total linking number  $n(T_1, T_2)$  を次のように定義する。

$$n(T_1, T_2) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{T_1} dt_1 \int_0^{T_2} dt_2 \frac{(\vec{x}_2(t_2) - \vec{x}_1(t_1), \dot{\vec{x}}_1(t_1) \times \dot{\vec{x}}_2(t_2))}{\|\vec{x}_1(t_1) - \vec{x}_2(t_2)\|^3} \quad (2.45) \quad *)$$

$T_1, T_2 \rightarrow \infty$  での漸近的振舞と

$$n(T_1, T_2) \approx \bar{n} T_1^{\nu_1} T_2^{\nu_2} \quad (T_1, T_2 \gg 1) \quad (2.46)$$

とすると  $n(T, T) \approx \bar{n} T^{\nu_1 + \nu_2} \equiv \bar{n}_L T^{\nu_L}$ , かつ  $\nu_L = \nu_1 + \nu_2$  となり、

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &\approx \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{\ln |n(T_1, T_2)|}{\ln T_1} & (T_2 \gg 1) \\ \nu_2 &\approx \lim_{T_2 \rightarrow \infty} \frac{\ln |n(T_1, T_2)|}{\ln T_2} & (T_1 \gg 1) \\ \bar{n} &\equiv \lim_{\substack{T_1 \rightarrow \infty \\ T_2 \rightarrow \infty}} \frac{n(T_1, T_2)}{T_1^{\nu_1} T_2^{\nu_2}} \\ \nu_L &\equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln |n(T, T)|}{\ln T} \\ \bar{n}_L &\equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n(T, T)}{T^{\nu_L}} \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

と定義する。  $\bar{n}_L$  と linking coefficient,  $\nu_L$  と linking index とする。

\*)  $x_1, x_2$  は S.A. 上の2つの軌道

更に時刻  $T$  までの relative torsion number  $r(T)$  を次式で定義する。

$$r(T) = \frac{1}{2\pi} \int_0^T \frac{\alpha_1 \alpha_2 - \dot{\alpha}_1 \alpha_3}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} dt \quad (2.48)$$

notation は (2.8) と同じ。更に、 $r(T) \approx \bar{r} T$  ( $T \rightarrow \infty$ ) とおくつまり、

$$\bar{r} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{r(T)}{T} \quad (2.49)$$

と定義する。これは、(2.40) 式の  $\langle r_i \rangle$  の拡張であり、 $\bar{r} = \frac{\langle r_i \rangle}{\langle T \rangle}$  となる。

$\langle T \rangle$  は、アトラクターを 1 周する平均の周期。Lyapunov 数は、接ベクトルの長さの

指数関数的変化を測る量であるのに対して、 $\bar{r}$  は軌道に相対的に、

接ベクトルの 回転 に関する情報を与える。時刻  $T$  までの total torsion

number  $n(T)$  は、

$$n(T) = - \frac{1}{4\pi} \int_0^T dt_1 \int_0^T dt_2 \frac{(\vec{y}_2(t_2) \cdot \vec{x}_1(t_1), \dot{\vec{x}}_1(t_1) \times \dot{\vec{y}}_2(t_2))}{\|\vec{x}_1(t_1) - \vec{y}_2(t_2)\|} \quad (2.50)$$

で定義される。但し  $\vec{y}_2(t_2) \cdot \vec{x}_1(t_1) + \frac{\vec{W}_2(t_2)}{\|\vec{W}_2(t_2)\|}$  2",  $x_1$  は S.A 上の軌道

$\vec{W}(t)$  は reference state  $\vec{x}_1(t)$  とした (2.4) 式の解。  $n(T) \approx \bar{n}_t T^\eta$  ( $T \rightarrow \infty$ ), 7 7

$$\left. \begin{aligned} \eta &\equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln |n(T)|}{\ln T} \\ \bar{n}_t &\equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n(T)}{T^\eta} \end{aligned} \right\} (2.51)$$

と定義し、 $\eta$  を torsion index,  $\bar{n}_t$  を torsion coefficient とする。

$\bar{n}_t$  は  $\langle n \rangle$  ((2.41)式) の拡張であって、後でみるように  $n=2$  と思われるので、

$\bar{n}_t = \frac{\langle n \rangle}{\langle T \rangle^2}$  の関係が成立する。つまり  $\bar{n}_t$  は軌道と変分ベクトルのつくる軌道との

かゝみあり、いゝかえり、S.A.上の軌道の近傍の平均的な値に記述する。

以上種々の量を定義したが、その定義の正しさの‘極限の存在’や、

‘初期条件へ依存しないこと’等については、数学的に証明していない。

しかし、次節で述べる数値計算の結果は、それらについて、傍証を与える。

## 2-6. 数値計算その2 (カオス領域)

カオス領域での位相的諸量の数値計算は、かなり困難があり、数値積分の積分範囲も、まともにやると大きくとることができない<sup>\*</sup>。以下での結果は、アトラクター上を約50周する時間範囲での計算に基づくものである。

### ① $\overline{\nu}_L$ , $\overline{n}_L$ の計算

これらの量は、オリジナルローレンツモデル、強制ローレンツモデルで

いくつかのパラメータの値に対して計算された。まず、オリジナルローレンツ

モデルでは、次の3つのパラメータで計算が行われた。

(i)  $\sigma=10$ ,  $b=2.6667$ ,  $r=28$ , (いわゆるローレンツアトラクター

(ii)  $\sigma=10$ ,  $b=\frac{8}{3}$ ,  $r=116.3$ , Manneville Pomeau の Intermittency

(iii)  $\sigma=16$ ,  $b=4$ ,  $r=300$ , 2分岐が集積した後の非対称カオス<sup>\*</sup>

合計して、タイプBの対称カオスに属した領域<sup>\*</sup>

図53の(a)~(c)に数値計算の結果を示す。図より得られた  $\overline{\nu}_L$ ,  $\overline{n}_L$  はそれぞれ

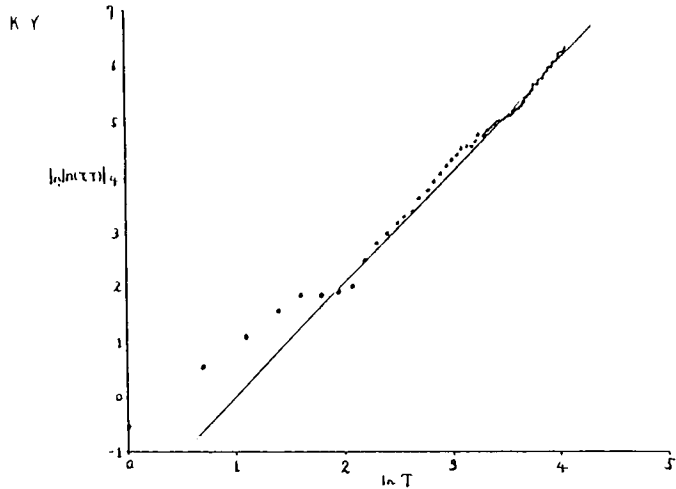
次のようになる。

\*)(2.45), (2.50) の積分をモンテカルロ法でやれば、積分範囲を大きくできる。

(i)  $\sigma=10, b=2.6667, r=28$

$\gamma_L = 2.05, \bar{n}_L = 0.13$

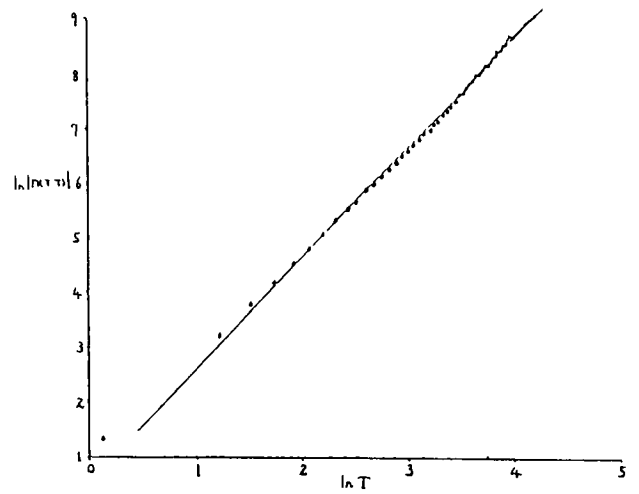
DEP



(a)

(ii)  $\sigma=10, b=\frac{8}{3}, r=166.3$  88

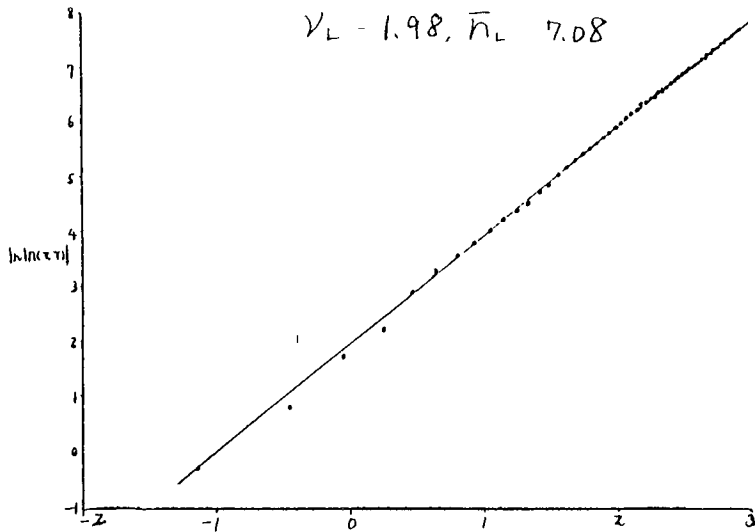
$\gamma_L = 2.02, \bar{n}_L = 1.79$



(b)

(iii)  $\sigma=16, b=4, r=300$

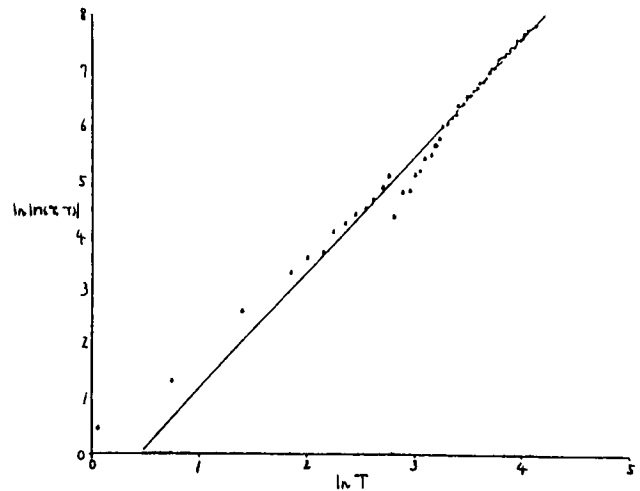
$\gamma_L = 1.98, \bar{n}_L = 7.08$



(c)

(iv)  $A=116.45, B=6, \sigma=10, b=2.6667, r=28$

$\gamma_L = 2.15, \bar{n}_L = 0.38$

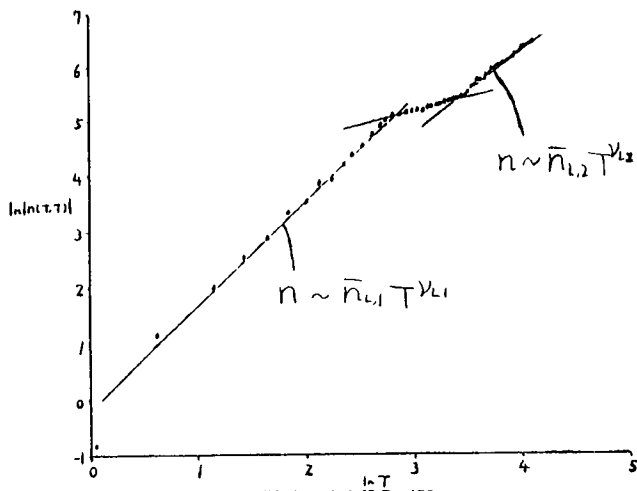


(d)

(v)  $A=61, B=6, \sigma=10, b=2.6667, r=28$

$\gamma_{L1} = 1.85, \bar{n}_{L1} = 0.84$

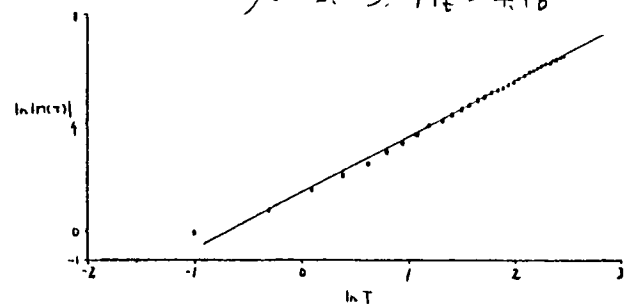
$\gamma_{L2} = 1.52, \bar{n}_{L2} = 1.22$



(e)

(vi-a)  $\sigma=16, b=4, r=250$

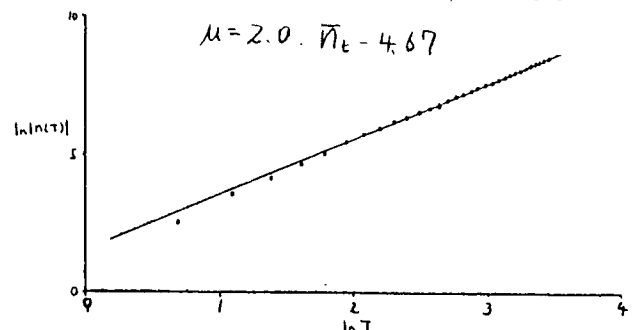
$\mu=2.03, \bar{n}_t=4.16$



(f)

(vi-b)  $\sigma=16, b=4, r=250$

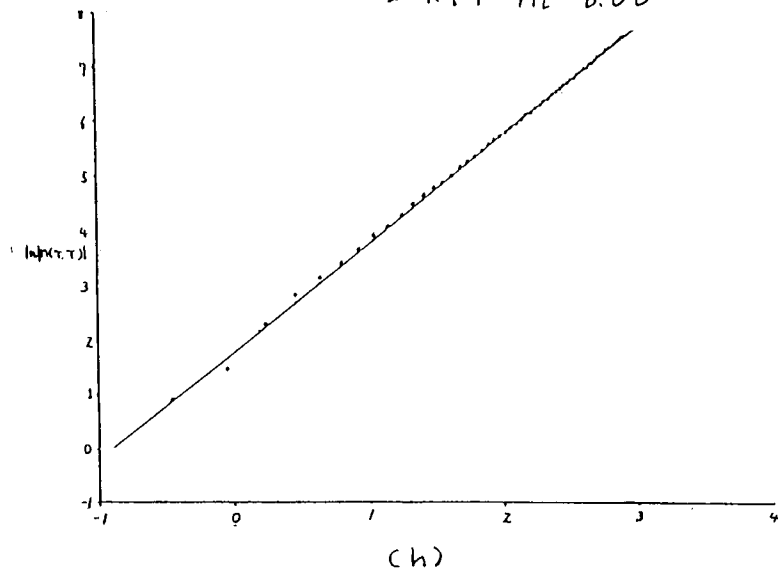
$\mu=2.0, \bar{n}_t=4.67$



(g)

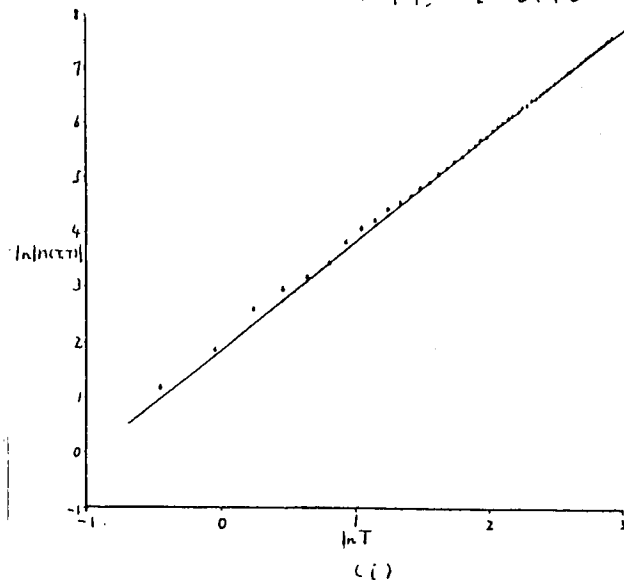
(vii-a)  $\sigma=16, b=4, r=330$

$\nu_L=1.99, \bar{n}_L=6.00$



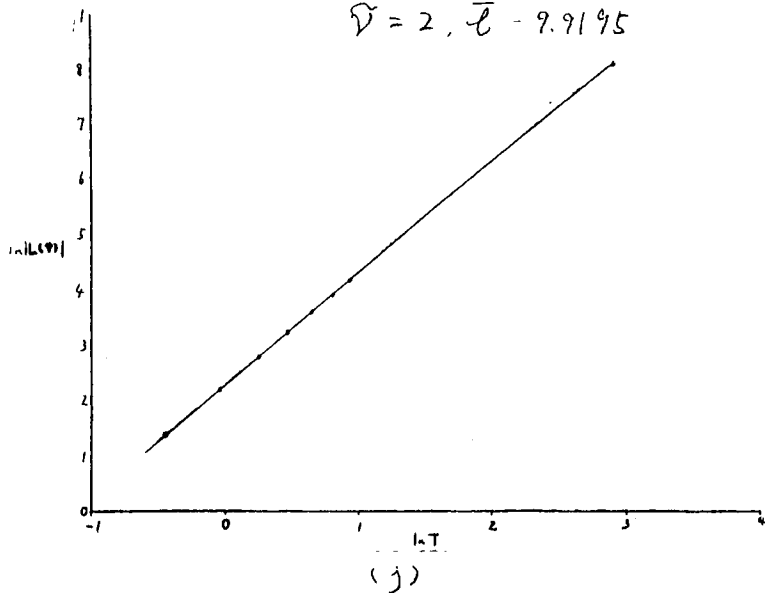
(vii-b)  $\sigma=16, b=4, r=330$

$\nu_L=1.97, \bar{n}_L=6.40$



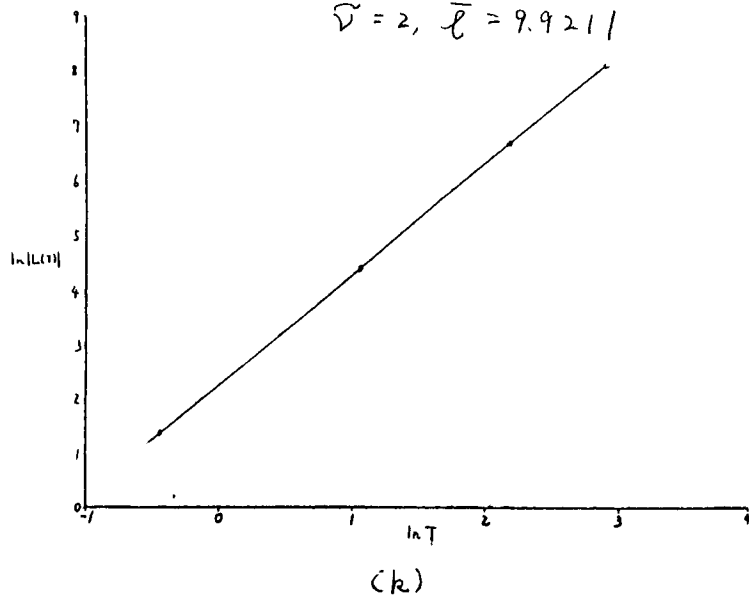
(viii-a)  $\sigma=16, b=4, r=333.0$

$\bar{\nu}=2, \bar{\ell}=9.9195$



(viii-b)  $\sigma=16, b=4, r=333.0$

$\bar{\nu}=2, \bar{\ell}=9.9211$



この図では、数点しか plot してないが  
58個のa.点が一全直線の上にのる。(k)も同様。

$$(i) \nu_L = 2.05, \bar{n}_L = 0.13$$

$$(ii) \nu_L = 2.02, \bar{n}_L = 1.79$$

$$(iii) \nu_L = 1.98, \bar{n}_L = 7.08$$

これから、 $\nu_L \approx 2$  と期待される。(ii)の場合、 $r$  が少し小さい値では 対称

リミットサイクルが安定であり、(図54)  $n_1 = 2, r_1 = 0, L = 2$  である。単位時間

当たりの torsion number  $\frac{n_1}{T_0^2}$  ( $T_0 = 1.132864$  リミットサイクルの周期) と、 $\bar{n}_L$  とが

比較されるべきであるが、Intermittency の場合は  $\bar{n}_L \approx \bar{n}_L$  と考えられ、

$\frac{n_1}{T_0^2} = 1.56, \bar{n}_L = 1.79$  であるから、両者は連続的につながると期待される。

次に、強制ロレンツモデルでは、 $\sigma = 10, b = 2.6667,$

$r = 28$  として 次の 2 つの 110 x 9 ター 2 計算された。

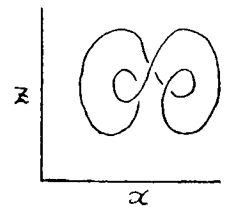


図 54

$\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, r = 166$

(iv)  $A = 116.45, B = 6.0$ , 2 次元集積後の

非対称カオス領域

(v)  $A = 61.0, B = 6.0$ , 2 次元 Lyapunov 数  $L_s$  が  $A$  の増加とともに

正から負に変化することから、従って Kaplan-Yorke の公式によれば

Hausdorff 次元  $D_H$  が減少して、 $D_H < 2$  になる点。

図 53 の (d), (e) に示されているように、data は必ずしも直線上に

のどまりが  $\nu_L, \bar{n}_L$  を評価すると。

$$(iv) \nu_L = 2.15, \bar{n}_L = 0.38$$

$$(v) \nu_{L1} = 1.85, \bar{n}_{L1} = 0.84, \nu_{L2} = 1.52, \bar{n}_{L2} = 1.22$$

となる。(v)の場合は, dataの最初の部分と最後の部分を各々評価した。

これは いずれも  $\nu_L$  とは異なっており (v)においては収束性さえ

確かではない。強制ローレンツ系が本質的に4次元の系であり、

高次元系で結び目やリンクが well-defined ではないせいかもしれない。

\*)  
しれない。

## ② $\mu, \bar{n}_c$ の計算

定義から  $\mu = 2$  と期待されるが 計算の結果も そうなっている。

$$(vi-a) \text{ オリジナル ローレンツ モデル } a=16, b=4, r=250,$$

この値は 対称リミットサイクル(図55)から Intermittency

\*\*)  
へ 遷移した後に 対応する。

$$(vi-b) \text{ (vi-a) と同じパラメーター 初期値が異なる。}$$

結果は 次のようになる。図53、(f),(g)。

\*) 積分時間が十分に長く収束していないとも考えられる。

\*\*)  $r=248.4$  は周期  $2T_0$  ( $T_0=0.36697866$ ) のリミットサイクルで、 $\nu_1=0.81$ ,  $r=248.5$

は Intermittency。



$$(vi-a) \mu = 2.03, \bar{n}_t = 4.16$$

$$(vi-b) \mu = 2.0, \bar{n}_t = 4.67$$



図 55

対称リミット・サイクルは  $n_t = 3, r_t = 1, L = 2$  であり.

$\frac{n_t}{T_0} \approx 5.57$ .  $\bar{n}_t$  との差は 小さいとは言えず、ハーズター変化とともに

急激にリンク数が減少すると考えられる。

### ③ 初期値依存性

これについては、既に (vi-a) (vi-b) のみたように、 $\mu$  に関しては依存しない

ことが結論できる。 $\bar{n}_t$  については、誤差が exponential で拡大するため、

大きな差にたどり着くと考えられ、誤差の範囲で一定だとみられる。 $\bar{n}_L, \bar{n}_R$  に

については、次の系で計算を行った。

(vii-a) オリジナル・ローレンツ・モデル,  $a=16, b=4, r=333.0$ , 2"分岐

集積直後のカオス領域

(vii-b) (vii-a) と同じハーズター 初期値が異なる。

結果は 次のようになる。図 53, (h), (i)。

$$(vii-a) \bar{n}_L = 1.99, \bar{n}_R = 6.00$$

$$(vii-b) \bar{n}_L = 1.99, \bar{n}_R = 6.40$$

誤差の範囲で  $\bar{n}_L = 2$ , 又  $\bar{n}_L$  も一定とみられる。又  $2^n$  分岐の極限值

としての  $\langle n_1 \rangle$  は,  $\langle n_1 \rangle = \frac{3}{5}$  で,  $\frac{\langle n_1 \rangle}{\langle T \rangle^2} \approx \frac{\langle n_1 \rangle^*}{T_0^2} = 5.96$  であり,  $\bar{n}_L$  とよく

一致している。

#### ④ リンク数

2つの S.A. のリンク数を次のように定義する。

$$L(T_1, T_2) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{T_1} dt_1 \int_0^{T_2} dt_2 \frac{(\vec{x}_2(t_2) - \vec{x}_1(t_1)) \cdot \dot{\vec{x}}_1(t_1) \times \dot{\vec{x}}_2(t_2)}{\|\vec{x}_1(t_1) - \vec{x}_2(t_2)\|} \quad (2.52)$$

ここで,  $x_1, x_2$  は, それぞれの S.A. 上の軌道。  $L(T_1, T_2) \approx \bar{L} T_1^{\tilde{\nu}_1} T_2^{\tilde{\nu}_2}$  ( $T_1, T_2 \gg 1$ )

とすると,  $L(T, T) \approx \bar{L} T^{\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2} \equiv \bar{L} T^{\tilde{\nu}}$ , かつ  $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2$ 。

$\bar{L}, \tilde{\nu}$  を次の系で計算した。

(viii-a) オリジナル・ローレンツ モデル,  $\sigma=16, b=4, r=333.0$

(viii) と同じ値。

(viii-b), (viii-a) と同じ系で初期値が異なる。

結果は次のようになる。図 53. (j), (k)。

(viii-a)  $\tilde{\nu} = 2, \bar{L} = 9.9195$

(viii-b)  $\tilde{\nu} = 2, \bar{L} = 9.9211$

\*)  $T_0$  として,  $r=333.3$  ( $16T_0$ ) の周期の  $\frac{1}{16}$  倍を用いた。  $T_0 = 0.3173540$ ,  $\frac{\langle n_1 \rangle}{\langle T \rangle^2}$  と

比較されるべき量は,  $\bar{n}_L$  であるか。ここでの結果より  $\frac{\langle n_1 \rangle}{\langle T \rangle^2} \approx \bar{n}_L \approx \bar{n}_L$  と予想される。

収束性は明らかであり 初期値依存性がないこともわかる。平均周期

当りのリンク数は  $\bar{\ell} \langle T \rangle^* \approx \bar{\ell} T_*^* = 0.9371$  (aの場合),  $0.9372$  (bの場合)

で 約 1 回である。これは 図 56 より 明らかである。

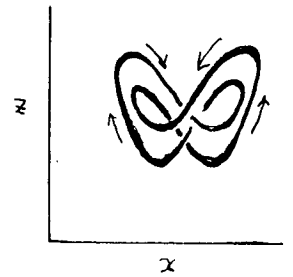


図 56.

以上の結果をまとめると 次のようになる。

1. 自律系の場合  $\nu_L = 2$ ,  $\nu = 2$ , 非自律系の場合は 収束性が不明。

2. <sup>\*</sup>  $z^n$  分岐集積直後のカオスでは,  $\bar{n}_L \approx \bar{n}_t \approx \frac{\langle n_1 \rangle}{\langle T \rangle^2}$ , 即ち, 周期解

領域の位相構造も反映している。Intermittency 生成直後についても

同様。

3.  $\tilde{\nu} = 2$ 。

4.  $\bar{n}_L, \bar{n}_t, \bar{\ell}$  の初期値依存性は低い。(有意の相異が認められない)。

3 については, 解の一貫性, flow の連続性より殆ど明らかであり, 4 は 誤差の

範囲に 差が収まっているという一である。

\* 以下 自律系の場合についての記述である。

# ス-7. オリジナル・ローレンツ モデルの大域的分岐過程における位相構造の変化

オリジナル・ローレンツ モデル (2.43) において  $\sigma=16$ ,  $b=4$  なる値で  $r$  を下げていくと、

アトラクターは、図 57 のように分岐していく。<sup>59)</sup> 各系列で, trivial knot を持つ

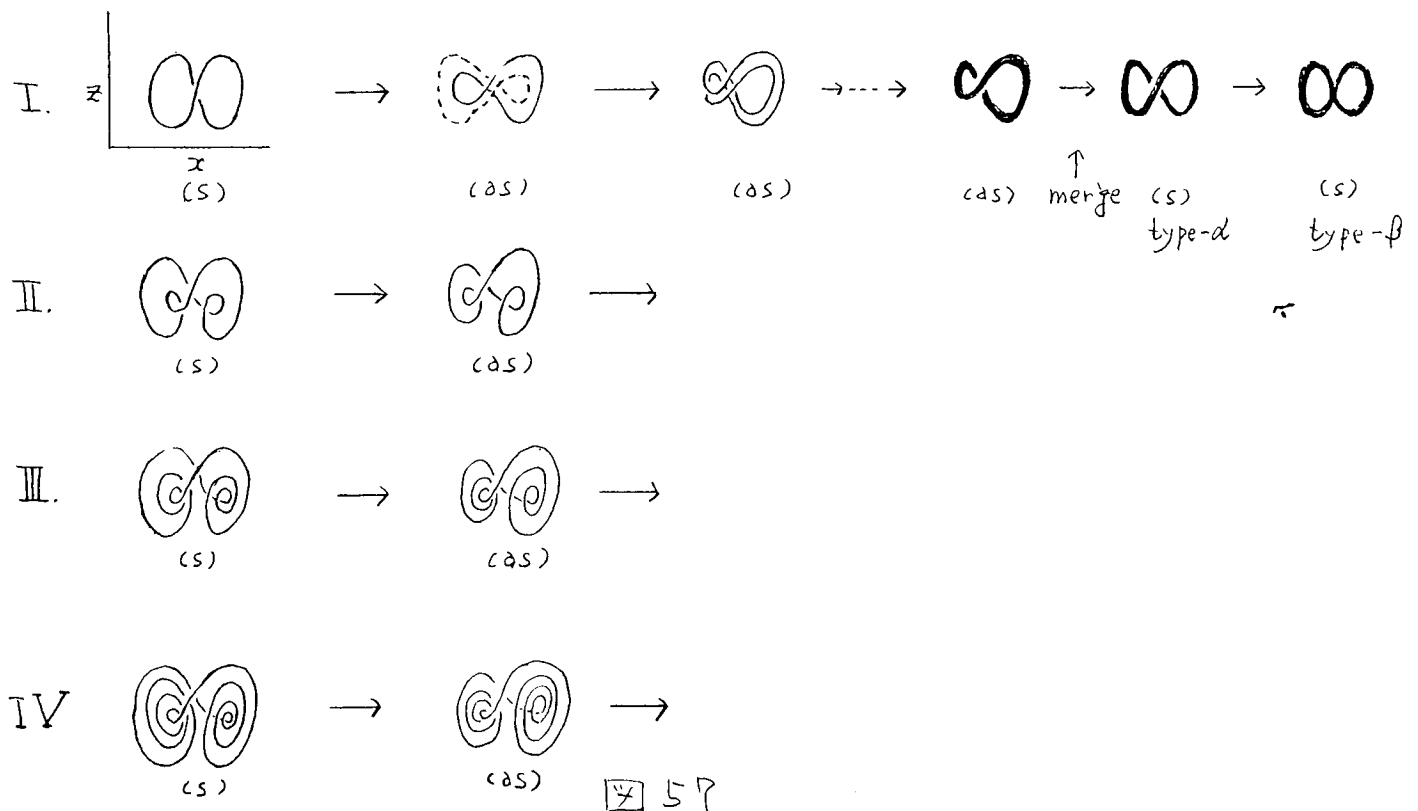
対称リミット サイクル が Intermittent 遷移の逆過程で生成し、<sup>\*</sup> pitch fork 分岐を

して 非対称になり、それぞれが 2<sup>n</sup> 分岐を生じて 非対称カオスになる。その後

逆カスケードが生じ、更に 2つの非対称カオスが合体して 対称カオスに

なる。これで 1つの系列が終わり、次の系列に続く。<sup>\*\*)</sup>

系列



\* 系列 I の場合は  $r=\infty$  で保存系で、 $r<\infty$  で対称リミット サイクルが 1個安定にある。

\*\* ここでは、I~IV の系列をみていくが、カオス領域内に窓構造のある可能性も無視できない。

このときの位相的諸量の値を表8に示す。対称リミットサイクルについての量に

注目するとその値の変化には規則性があり、 $n_1^{(0)}$ は  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7$  と変化する。

バンドでみると図58のように変化する。この変化は周期倍分岐やピッチフォーク分岐

又スリ分岐で実現するとはできない(各々がtrivial knotという条件も加わら

ない)。位相的諸量はカオスの存在についての判定基準として用いることも

できよう。周期解及びS.A.の構造は、 $r$ が小さくなるに従って複雑になり、

かつ空間を占める規模、つまりアトラクターの大きさが、大きくなっていき、

系列	I (s)	I (a)	II (s)(a)	III (s)(a)	IV (s)(a)
$n_1^{(0)}$	1	1	3	5	7
$r_1^{(0)}$	1	0	1	1	1
$L^{(0)}$	0	1	2	4	6
$l$	1		1	1	*
$\langle n \rangle$	$\frac{3}{5}$		0.65	0.2875	*
$\frac{\langle n \rangle}{\langle T \rangle^2}$	5.96		4.27	2.07	*
$\langle r \rangle$	$-\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$	*
$\frac{\langle r \rangle}{\langle T \rangle}$	-1.05		0.85	0.45	*

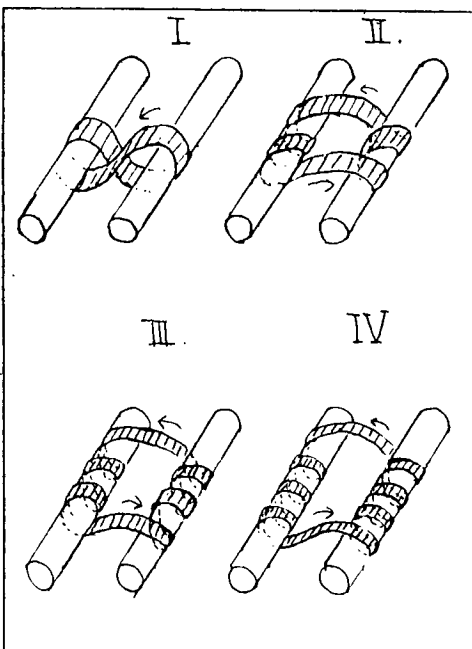


表 8 \*)

図 58

\*) 系列 I は 対称リミットサイクル (s) を 1 周期解として 16 周期まで II は、

(s) を 2 周期として 4 周期まで、III は、(s) を 4 周期として 16 周期まで IV は (s)

を 4 周期として 8 周期までみつかっている。

最終的には Lorenz の見出した構造に至ると思われる。図 59。<sup>51) 4)</sup>

図 59 のような位相構造が  $r$  が大きい

領域でも存在すると仮定すれば

I  $\rightarrow$  IV の変化は次のように考えることが

できる。まず 対称な

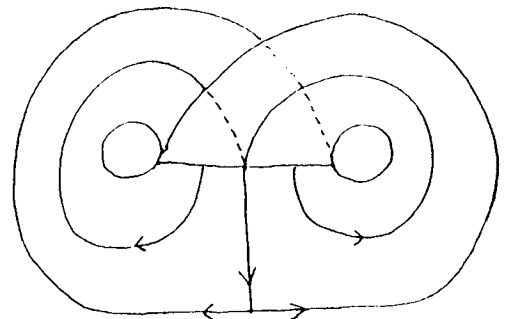


図 59

リミットサイクルのビッチフォーク

分岐で 2つの basin に分れる。

図 60-(a)  $\rightarrow$  (b)。次に各々の領域

で 2分岐をおこして S.A. になる。

図 60-(c)。その後、2つの非対称

S.A. が合体して、1つの対称 S.A.

になる。図 60-(d)。このとき、

原点のサドルは、S.A. に含まれ

ておらず type  $\alpha$  である。

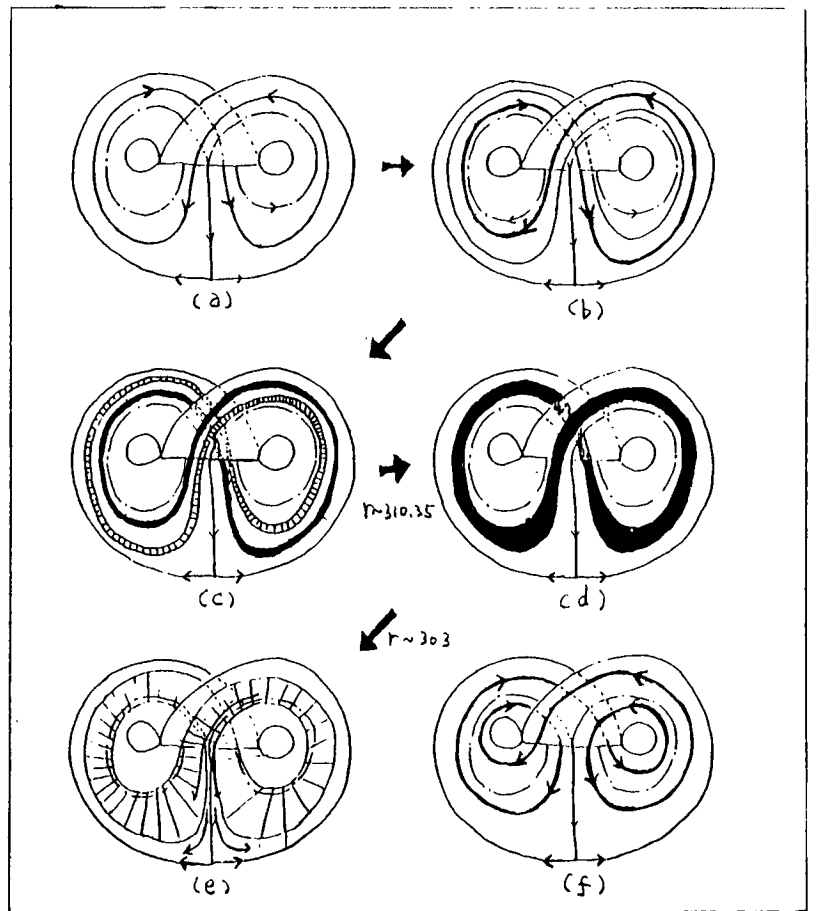


図 60

\* ローレンツ・アトラクターは、 $\sigma=10$ ,  $b=\frac{8}{3}$ ,  $r=28$  で、今の場合  $\sigma=16$ ,  $b=4$  で

あるが アトラクターの構造は同じであると考えられる。

$r \approx 303$  で type  $\alpha \rightarrow$  type  $\beta$  の遷移が生じる。図 60-(e)。この遷移は原点の安定多様体から対称 S.A. と「接触」\*<sup>\*)</sup> することによって、原点が S.A. の 1 部分になるために生じる。図 60-(e) で斜線を施した部分に滞在する時間が長いから、S.A. とは、原点を含む、図 59 の全領域である。更に  $r$  が下がると図 60-(f) のリミットサイクルが Intermittent 遷移の逆過程で生成する。以上のプロセスが、繰り返される。<sup>\*\*\*)</sup> 最後に、以上の遷移を図 61 にまとめる。<sup>\*\*\*)</sup>

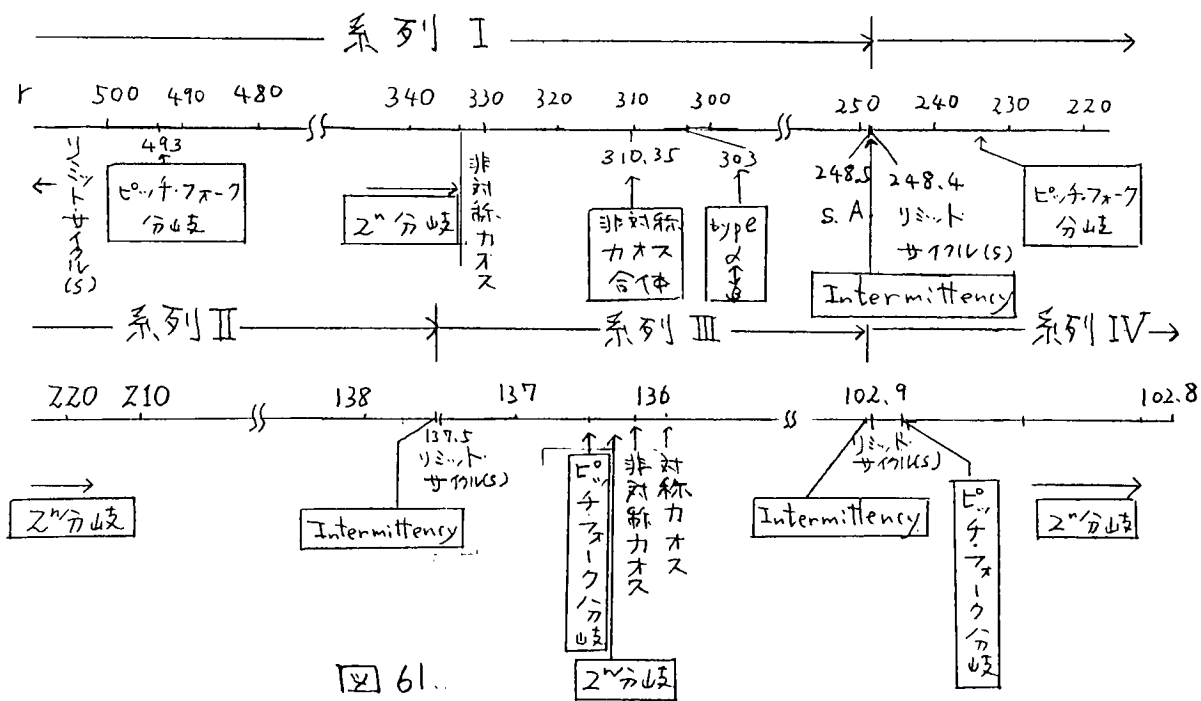


図 61.

\*<sup>\*)</sup>  $t \rightarrow -\infty$  で S.A. の basin に 接触すると考えられる。

\*\*<sup>\*)</sup> 全ての系列で確認したわけではない。巻き数の異なるリミットサイクル

が Intermittent 遷移の逆過程で生成するためには type  $\beta$  が必要であろう。

\*\*\*<sup>\*)</sup> 下の計算については、省略する。

## ス-8、まとめと議論

この章では、まず3次元常微分方程式の周期解を位相的に特徴付け、分岐の前後での位相的諸量の変化について調べた。又、2分岐が flow 系でいかにして生ずるかについての議論がなされた。いくつかのモデルにおける数値計算は理論の正しさを示持っている。次に S.A. を位相的に特徴づける諸量が定義され、それについての数値計算が行なわれた。アトラクター上の2つの軌道の絡み合いが時間について増大する程度を示すリンク指数  $L$  は、カオスを特徴づける最も適当な量と予想されたが、少なくとも自律系の場合には  $L = 2$  という結論を得た。これは、リミットサイクルの場合と同じ値であり、他の事実、例えば、2分岐集積後のカオスの位相構造が「リミットサイクル領域」の位相構造の極限として理解できる事や、Intermittency の場合 層流状態に対応するリミットサイクルの位相構造を反映している事等とともに、カオスの位相構造がその中に稠密にあると考えられる周期解の位相構造によって理解できるということが推論される。又、ローレンツモデルを例にとり、2.1パラメータをかなり広い範囲で変化させたとき現われるカオス、リミットサイクルの位相構造の



変化を調べた。その際、Intermittent 遷移の逆過程で生じる一連の対称リミット

サイクルの torsion number  $n_i$  には、ある規則性があり、又、その規則は リミットサイ

クルの分岐の際の torsion number の変化の規則と異なることがわかる。対称

リミットサイクル間にはカオス領域がある。一般に、次の命題が成立すると結論

できる。「種々の分岐による『結び目型』、'torsion number' の変化で関係

づけることのできない位相構造を持つ二つの周期解の中間領域にカオスが

\*) 存在する」。これは前半の理論からの必然的な帰結である。\*\*)

トラスの分岐<sup>\*\*\*)</sup> についての議論はあまりなされなかったが保存系の場合の  
議論とともに、将来の課題である。

我々は 3次元系に話を限ったが、4次元以上の系への拡張については、未だ適当な位相的量が定義できないため、なされていない。例えば強制ローレンツ系では、2分岐における  $n_i, r_i$  の変化についての規則性が見出されていない。

\*) 勿論逆については何も述べていない。

\*\*) basin が1個の場合、但し対称性による複数個の basin は、かまわない。

\*\*\*) 3次元自律系で Hopf 分岐が生ずるためには ストロボ マップの微分の行列式が1、つまり少なくとも local に保存的になり得ることが必要であり、ローレンツモデルでは不可能である。

(表4)。空間の次元を  $n$  としたとき 閉いた (closed)  $r$  次元多様体と  $s$  次元多様体  
 が  $n-r+s+1$  なる関係を満たすときには リンク数を一般的に定義できる。<sup>60)</sup>  
 ( $0 \leq r \leq n-1$ )。従って  $n=4$  の場合には 閉曲面と閉軌道のリンクを考えべきで  
 あり、閉軌道 どうしたと、残された自由度で 'すり抜ける' 事ができて リンクは  
 意味をなさない。<sup>\*</sup>

偏微分方程式を近似して、3次元常微分方程式にした場合に - の論文で  
 述べたような位相構造による分岐の制限が どの程度 もとの偏微分方程式  
 の解の制限になるかは 明らかではないが 何かしらの性質を反映している  
 ことは予想される。これは 将来の研究に役たなければならぬ。

\* カ学系の解はその位置が 決まってしまうので 解を移動させるという

操作は 意味がないが 10<sup>10</sup> x ターの変化による移動は あり得る。その

ような状況下で、リンクという概念が カ学系においても重要であると

考えられる。

謝 辞

第1章の研究テーマを与えて下さり御指導していただいた  
富田和久教授に心から感謝致します。又、第2章の研究は  
相沢洋二博士との共同研究及び discussion に負うところがあり、相沢  
博士に感謝致します。更に富田研究室の方々や諸先輩方、又  
蔵本由紀教授、そして物性理論の方々にはセミナー及び  
大学院生活を通じていろいろ教えていただきました。ここに感謝の  
意を表したいと思います。

# A Hénon マップと二次までの非線形性を持つ散逸率一定( $\neq 0$ )の二次元写像との

同値性 (decouple しない場合).

次のような写像を考えよ。

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x_n^2 + a_2 x_n y_n + a_3 y_n^2 + a_4 x_n + a_5 y_n \\ b_1 x_n^2 + b_2 x_n y_n + b_3 y_n^2 + b_4 x_n + b_5 y_n \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

散逸率一定の条件より,

$$\left. \begin{aligned} a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ a_1 b_3 - a_3 b_1 \\ 2a_1 b_5 + a_4 b_2 - a_2 b_4 + 2a_5 b_1 \\ a_2 b_5 + 2a_4 b_3 - 2a_3 b_4 + a_5 b_2 \\ a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_4 b_5 - a_5 b_4 \quad (\text{const.} \equiv B (\neq 0)) : \text{散逸率} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2})$$

$f$  は非線形 即ち  $|a_1| + |a_2| + |a_3| > 0$  と仮定する。

1.  $g$  が線形の場合, i.e.,  $b_1 = b_2 = b_3 = 0$

$b_4 = 0$  だと decouple するから,  $b_4 \neq 0$ , 又座標変換により  $b_4 = 1, b_5 = 0$  とおいた。

すると,  $a_2 = a_3 = 0, B = -a_5$  となる。

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x_n^2 + a_4 x_n + a_5 y_n \\ x_n \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

そこで  $\tilde{x} = \frac{a_1}{2} x, \tilde{y} = \frac{a_1}{2} y$  とおけば  $C = \frac{a_4}{2}$  となる。

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{n+1} \\ \tilde{y}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C\tilde{x}_n - B\tilde{y}_n + 2\tilde{x}_n^2 \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

2.  $f$  が非線形, i.e.,  $|b_1| + |b_2| + |b_3| > 0$

$b_2 = 0$  とおいてよい (A.2) より  $\frac{1}{B^2}$  非線形に 1 次のようになる ( $x$  と  $y$  の  $\lambda$  が  $\lambda^2$  になる)

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x^2 + a_4 x + a_1 k_1 y \\ b_1 x^2 + b_4 x + b_1 k_1 y \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \\ B = k_1(a_4 b_1 - a_1 b_4), \quad a_1 b_1 \neq 0, \quad k_1 \equiv \frac{a_5}{a_1} = \frac{b_5}{b_1} \neq 0 \end{array} \right\} (\text{A.5})$$

$$\tilde{x} = \frac{a_1}{2} x, \quad \tilde{y} = \frac{k_1 a_1}{2B} (b_1 x - a_1 y) \quad \text{とおく} \quad C = \frac{a_4 + k_1 b_1}{2} \quad \text{と} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{n+1} \\ \tilde{y}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C\tilde{x}_n + 2\tilde{x}_n^2 - B\tilde{y}_n \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

B. 対称性のある系での対称リミットサイクルの倍周期分岐の禁止について

次の命題を証明する。

命題 1

微分方程式 (B.1) を考える。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \vec{F}(\vec{x}, t) \\ \vec{x}, \vec{F}(\vec{x}, t) &\in \mathbb{R}^n \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.1})$$

$S$  を  $\mathbb{R}^n$  から  $\mathbb{R}^n$  への線形写像で  $S^2 = I$  とする。又  $SS^t = S^t S^{*})$  とする。

仮定 1)  $\vec{F} \in C^1$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$  ( $\mathbb{R}^{n+1}$  は  $(\vec{x}, t)$  の空間)

2)  $S\vec{F}(\vec{x}, t) = \vec{F}(S\vec{x}, t)$  (対称性) (B.2)

3)  $\vec{F}(\vec{x}, t+T) = \vec{F}(\vec{x}, t)$  (周期性) ( $T < \infty$ ) (B.3)

4)  $\vec{x}_0(t)$  は (B.1) の周期解で その周期を  $T$  とする。そして

自らと交差せず  $^{**})$  対称であるとする。即ち、

$$\{\vec{x}_0(t); 0 \leq t < T\} \quad \{S\vec{x}_0(t), 0 \leq t < T\}$$

5)  $S\vec{x}_0(t) \neq \vec{x}_0(t)$   $^{***})$

$$6) \vec{F}(\vec{x}, t) = \vec{F}_0(\vec{x}) + \vec{g}(t)$$

---

$*)$   $S^t$  は  $S$  の転置行列。

$^{**})$  自律系では  $T < \infty$  の限り自動的にみたさういふ。

$^{***})$  解の一意性から、ある時刻  $t_0$  で  $S\vec{x}_0(t_0) = \vec{x}_0(t_0)$  ならば、任意の時刻で  $S\vec{x}_0(t) = \vec{x}_0(t)$ 。

このとき  $\vec{x}_0(t)$  のまわりの変分方程式 (B-4) を考えよ。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{w}(t) &= \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0(t), t) \vec{w}(t) = \frac{\partial \vec{F}_0}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0(t)) \cdot \vec{w}(t) \\ &A(\vec{x}_0(t)) \vec{w}(t) \end{aligned} \right\} \quad (B-4)$$

$$A_{ij}(\vec{x}) = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\vec{x}) \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (B-5)$$

このとき 次の事が成り立つ。

「  $\text{Exp} \left[ \int_0^T A(\vec{x}_0(t)) dt \right] \equiv dM(\vec{x}_0(0))$  の非縮退実固有値は正である。

又 非自律系の場合、対称リミットサイクルの周期は外力の周期の

偶数倍である。」

[証明] 条件より、直交行列  $U$  が存在して  $S = U S U^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{(n-h)}$

とできる。  $\vec{F}(\vec{x}, t) \equiv U F(U^t U \vec{x}, t)$ ,  $\vec{S} = U \vec{x}$  とおくと (1) ~ (6) は

そのまま成り立つのでこれを改めて  $S, \vec{F}, \vec{x}$  と考えよ。従って

$$S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S S^t = I, \quad S^t = -S \quad (B-6)$$

(B-1), (B-2) より

$$\frac{d}{dt} S \vec{x}(t) = \vec{F}(S \vec{x}(t), t) \quad (B-7)$$

即ち、 $\vec{x}(t)$  が (B-1) の解ならば  $S \vec{x}(t)$  も解である。条件 4) より次のように

時刻  $u(t)$  が一意に存在する。

$$S \vec{x}_0(t) = \vec{x}_0(u(t)), \quad t < u(t) < t + T \quad (B-8)$$

一より

$$u(u(t)) = t + T \quad (B.9)$$

従って

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S \vec{x}_0(t) &= \left. \frac{d}{du} \vec{x}_0(u) \right|_{u=u(t)} \cdot \frac{d}{dt} u(t) \stackrel{*}{=} \vec{F}(\vec{x}_0(u(t)), u(t)) \frac{d}{dt} u(t) \\ &= \vec{F}(S \vec{x}_0(t), t) = \vec{F}(\vec{x}_0(t), t) \end{aligned}$$

即ち

$$\vec{F}(\vec{x}_0(t), t) = \vec{F}(\vec{x}_0(t), u(t)) \frac{d}{dt} u(t) \quad (B.10)$$

二より  $u(t) = t + \frac{T}{2}$  を証明する。

## ① 自律系の場合

(B.1)の任意の解  $\vec{x}(t)$  に対して、任意の定数を  $C$  としたとき、 $\vec{x}(t+C)$  も解。

$\vec{y}(t) = S \vec{x}_0(t) = \vec{x}_0(u(t))$  とおいたとき、これは初期値  $\vec{x}_0(T_1)$  なる (B.1)

の解、但し  $T_1 = u(0)$ 。  $\vec{z}(t) = \vec{x}_0(t+T_1)$  とおくと これは初期値  $\vec{x}_0(T_1)$

なる (B.1) の解。よって解の一意性より  $\vec{y}(t) = \vec{z}(t)$ , i.e.,  $\vec{x}_0(u(t)) = \vec{x}_0(t+T_1)$ 。

$0 < t < T_1$  であるから、 $u(t) = t + T_1$ 。(B.9)より  $u(t) = t + \frac{1}{2}$ 。

## ② 非自律系の場合

(B.10)で  $t$  のかわりに  $u(t)$  を代入すると

$$\vec{F}(S \vec{x}_0(t), t) = \vec{F}(\vec{x}_0(u(t)), u(t)) \frac{d}{dt} u(t) \quad (B.11)$$

\*  $u(t)$  の連続性、微分可能性は 附録 C で証明される。



(B.10) から (B.11) へ引くと,

$$\vec{F}(\vec{x}_0(t), t) - \vec{F}(S\vec{x}_0(t), t) = \left\{ \vec{F}(\vec{x}_0(t), u(t)) - \vec{F}(S\vec{x}_0(t), u(t)) \right\} \frac{d}{dt} u(t) \quad (\text{B.12})$$

5) の仮定のもとで  $k = n-1$  のとき  $\vec{F}(\vec{x}_0(t), t) \neq \vec{F}(S\vec{x}_0(t), t)$  へ証明する。

そのため背理法を使う。つまり  $t_0$  が存在して

$$\vec{F}(\vec{x}_0(t_0), t_0) = \vec{F}(S\vec{x}_0(t_0), t_0) \quad (\text{B.13})$$

と仮定する。これから  $\vec{x}_0(t_0) = S\vec{x}_0(t_0)$  が従う。

$\vec{v}(t) = S\vec{x}_0(t) - \vec{x}_0(t)$  とおくと,

$$\left. \begin{aligned} S\vec{v}(t) &= -\vec{v}(t) \\ S\dot{\vec{v}}(t) &= -\dot{\vec{v}}(t) \\ \dot{\vec{v}}(t_0) &= \dot{\vec{v}}(u(t_0)) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.14})$$

もし  $\dot{\vec{v}}(t_1) \neq 0$  なる  $t_1$  があれば そのとき  $\dot{\vec{v}}(t) = \beta(t) \dot{\vec{v}}(t_1)$  となる。

何故なら  $S$  の固有値  $-1$  の固有空間は 1次元であるから。

$\beta(t)$  は連続関数で

$$\left. \begin{aligned} \beta(t_1) &= 1, \beta(t_0) = 0, \beta(u(t_0)) = 0 \\ S\dot{\vec{v}}(t) &= -\beta(t) \dot{\vec{v}}(t_1) \\ S\dot{\vec{v}}(t_1) &= -\dot{\vec{v}}(t_1) \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.15})$$

(B.15) より

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}(t) &= \left( \gamma(t) - \frac{1}{2} \gamma(u(t_1)) \right) \dot{\vec{v}}(t_1) \\ \gamma(t) &= \int_{t_1}^t \beta(s) ds \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.16})$$

つまり

$$\left. \begin{aligned} S\vec{x}_0(t) - \vec{x}_0(t) &= \alpha(t) \vec{v}(t) \\ \alpha(t) &= \gamma(t) - \frac{1}{2}\delta(u(t)) \end{aligned} \right\} \quad (B \cdot 17)$$

とすれば、これより  $\alpha(t_1) = -\frac{1}{2}\delta(u(t_1))$ ,  $\alpha(u(t_1)) = \frac{1}{2}\delta(u(t_1))$  が従う。

$\alpha(t)$  は連続関数から、 $t_2$  があつて  $\alpha(t_2) = 0$ , つまり  $S\vec{x}_0(t_2) - \vec{x}_0(t_2) = 0$

これは仮定 5) に矛盾。従つて

$$\vec{v}(t) = 0 \quad \text{for } \forall t \quad (B \cdot 18)$$

つまり

$$\vec{v}(t) = \vec{V} = S\vec{x}_0(t) - \vec{x}_0(t) \quad (B \cdot 19)$$

$\vec{V}$  は定ベクトル。 (B-19) で  $t \rightarrow u(t)$  とすると

$$\vec{V} = S\vec{x}_0(u(t)) - \vec{x}_0(u(t)) = \vec{x}_0(t) - S\vec{x}_0(t) = -\vec{V}$$

つまり

$$\vec{V} = 0 \quad (B \cdot 20)$$

再び仮定 5) に矛盾。従つて始めの仮定 (B-13) が誤りであり、

任意の  $t$  に對して

$$\vec{F}(\vec{x}_0(t), t) \neq \vec{F}(S\vec{x}_0(t), t) \quad (B \cdot 21)$$

条件  $k=n-1$  をはずすと上記の議論は使えない。この場合は、

次のように考える。任意の時刻で、 $\vec{F}(\vec{x}_0(t), t) = \vec{F}(S\vec{x}_0(t), t)$  だと、

$\vec{x}_0(t) = S\vec{x}_0(t)$  とすれば  $\vec{x}_0(t) = S\vec{x}_0(t) + \vec{V}$  とおくと、仮定 5) に矛盾。と云ふが、

$[0, T)$  における有限区間で等号が成立しても矛盾はしない。しかし、このとき、速度は  $S$  の固有値 1 の固有空間内に制限される。つまり  $n$  次元空間内の  $k$  次元の  $S$ -不変な固有空間に束縛される。このような状況は例外的と考えるのが、 $[0, T)$  内の有限個の時刻で等号が成立すると仮定してよい。すると、仮定 6), (B.12) より 任意の  $k$  について,  $\frac{d}{dt} u(t) = 1$ . よって (B.9) より

$$u(t) = t + \frac{T}{2} \quad (\text{B.22})$$

さて (B.2) を  $\vec{x}$  で微分して

$$A(S\vec{x})S = SA(\vec{x}) \quad \text{for } \forall \vec{x}, \forall t \quad (\text{B.23})$$

を得る。 $\vec{w}(t)$  が (B.4) の解のとき、 $\vec{\tilde{w}}(t) \equiv S \vec{w}(t + \frac{T}{2})$  も (B.4) の解である。

$\vec{w}(0)$  を  $dM(\vec{x}_0(0))$  の固有値  $\lambda$  に属する固有ベクトルとする。

$$dM \vec{w}(0) = \lambda \vec{w}(0), \text{ i.e., } \vec{w}(T) = \lambda \vec{w}(0) \quad (\text{B.24})$$

また、 $\vec{\tilde{w}}(0)$  も  $\lambda$  に属する固有ベクトルである。何故なら、

$$\begin{aligned} \vec{\tilde{w}}(T) &= S \vec{w}(T + \frac{T}{2}) = S \text{Exp} \left[ \int_T^{T+\frac{T}{2}} A(\vec{x}_0(s)) ds \right] \cdot \vec{w}(T) \\ &= \lambda S \text{Exp} \left[ \int_T^{T+\frac{T}{2}} A(\vec{x}_0(s)) ds \right] \vec{w}(0) = \lambda S \text{Exp} \left[ \int_0^{\frac{T}{2}} A(\vec{x}_0(s)) ds \right] \vec{w}(0) \\ &= \lambda S \vec{w}(\frac{T}{2}) = \lambda \vec{\tilde{w}}(0). \end{aligned}$$

また、もし  $\lambda$  が縮退していなければ、数  $\mu$  が存在して

$$\vec{\tilde{w}}(0) = \mu \vec{w}(0) \quad (\text{B.25})$$

従って  $\vec{W}(t) - S\vec{W}(t + \frac{T}{2}) = \mu\vec{W}(t)$ . ことから  $\vec{W}(T) = \mu\vec{W}(0)$ , つまり

$$\lambda = \mu^2 \quad (\text{B.26})$$

$\lambda$  が実数なら  $\vec{W}(0)$  も実ベクトルに選べ 従って  $\mu$  も実数になる。よって、

$\lambda \neq 0$  であるから  $\lambda > 0$ 。又、(B.11)より

$$\vec{g}(t) = \vec{g}(t + \frac{T}{2}) \quad (\text{B.27})$$

即ち 周期は 外力の周期の偶数倍となる。

証明おわり。

同様の事が写像についてもいえる。

### 命題 2.

$M$  を  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  の写像とする。

$$\vec{x}_{n+1} = M(\vec{x}_n) \quad (\text{B.1}')$$

又  $S^2 = I$  とする。

仮定 1)  $M$  は  $\mathbb{R}^n$  上  $C^1$  級

$$2) [S, M] = SM - MS = 0$$

3)  $\{\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}\}$  は (B.1') の  $k$  周期解 ( $k > 0$ ) で 対称。即ち

$$\{\vec{x}_\ell; \ell=0, \dots, k-1\} = \{S\vec{x}_\ell; \ell=0, \dots, k-1\}$$

$$4) S\vec{x}_i \neq \vec{x}_i, \quad i=0, \dots, k-1$$

このとき 変分方程式

$$\delta \vec{x}_{n+1} = dM^k(\vec{x}_0) \cdot \delta \vec{x}_n \quad (B.2)$$

における  $dM^k(\vec{x}_0)$  の 0でない 非縮退実固有値は 正である。

又、 $k$  は偶数である。

[証明]  $\vec{x}_{i+1} = M\vec{x}_i$  とする。3) より 各  $i$  に対して  $j(i)$  が存在して  $x_{j(i)} = Sx_i$

で、4) より  $i \neq j(i)$ 。2) より  $S\vec{x}_{i+1} = M(S\vec{x}_i)$  とあるから、 $x_{j(i+1)} = M(x_{j(i)})$ 、つまり

$$j(i+1) = j(i) + 1. \quad M^{2j(i)}(\vec{x}_0) \cdot M^{j(i)}(\vec{x}_{j(i)}) = M^{j(i)}(S\vec{x}_0) \quad S M^{j(i)}(\vec{x}_0) = S\vec{x}_{j(i)}$$

$$= \vec{x}_0. \quad 1 \leq j(0) \leq k-1 \quad \text{より} \quad 2 \leq 2j(0) \leq 2(k-1). \quad \text{従って} \quad 2j(0) = k, \quad \text{つまり}$$

$$k \text{ は偶数で } S\vec{x}_0 = \vec{x}_{\frac{k}{2}}. \quad dM^k(\vec{x}_0)\vec{e} = \lambda\vec{e} \text{ とする。} \quad \vec{v} = S dM^{\frac{k}{2}}(\vec{x}_0)\vec{e} \text{ とおく}$$

$$dM^k(\vec{x}_0)\vec{v} = dM^k(S\vec{x}_0)S \cdot dM^{\frac{k}{2}}(\vec{x}_0)\vec{e}. \quad 2) \text{ より } dM(S\vec{x}) \cdot S = S dM(\vec{x})$$

$$\text{とあるから } dM^k(S\vec{x}_0)S = S dM^k(\vec{x}_0). \quad \text{従って}$$

$$dM^k(\vec{x}_0)\vec{v} = S \cdot dM^k(S\vec{x}_0) \cdot dM^{\frac{k}{2}}(\vec{x}_0)\vec{e} = S dM^k(\vec{x}_{\frac{k}{2}}) dM^{\frac{k}{2}}(\vec{x}_0)\vec{e}$$

$$= S dM^{\frac{k}{2}}(\vec{x}_k) \cdot dM^{\frac{k}{2}}(\vec{x}_0)\vec{e} = \lambda S dM^{\frac{k}{2}}(\vec{x}_k)\vec{e} = \lambda\vec{v}.$$

$$\text{よって、} \lambda \text{ が縮退していてもよいとすれば } \vec{v} = \mu\vec{e} \quad (\mu \text{ はスカラー}). \quad \text{つまり}$$

$$S dM^{\frac{k}{2}}(\vec{x}_0)\vec{e} = \mu\vec{e}. \quad \text{つまり}$$

$$dM^k(\vec{x}_0)\vec{e} = dM^{\frac{k}{2}}(\vec{x}_{\frac{k}{2}}) \cdot dM^{\frac{k}{2}}(\vec{x}_0)\vec{e} = dM^{\frac{k}{2}}(S\vec{x}_0) S^2 dM^{\frac{k}{2}}(\vec{x}_0)\vec{e}$$

$$= dM^{\frac{k}{2}}(S\vec{x}_0) S \mu\vec{e} = \mu S dM^{\frac{k}{2}}(\vec{x}_0)\vec{e} = \mu^2\vec{e}.$$

\* )  $1 \leq j(i) \leq k-1$  とする。

よ、 $\lambda = \mu^2$ 。  $\lambda$  が実数  $\mu$  を満たすとき、  $\lambda \neq 0$  ならば、  $\lambda > 0$ 。

証明おわり。

### C. $u(t)$ の連続性、微分可能性

$$1. u(t) < u(t_1) < t+T \quad \text{for } \forall t_1 \in (t, u(t))$$

$t < t_2 < u(t_2) < u(t)$  なる  $t_2$  が存在すると矛盾を導く.

集合  $A, B$  を次のように定義する.

$$A = \{ \vec{x}_0(\tau) ; t_2 \leq \tau \leq u(t_2) \}$$

$$B = \{ S\vec{x}_0(\tau), t_2 \leq \tau \leq u(t_2) \}$$

$$\|\dot{\vec{x}}_0\| > 0 \text{ であるから, } \xi \equiv f(t_f, t_i) = \int_{t_i}^{t_f} \|\dot{\vec{x}}_0(s)\| ds \equiv f(t_f) - f(t_i)$$

( $f(t) \equiv f(t, 0)$ ) は  $t_f$  と  $\xi$  の対応として  $C^1$  級の diffeo. である. 時刻  $t_1$  から

$t_2$  から  $u(t_2)$  まで動かすとき,  $S\vec{x}_0(\tau) = \vec{x}_0(u(\tau))$  は, 点  $\vec{x}_0(u(t_2))$  から  $\vec{x}_0(t_1+T)$

$$= \vec{x}_0(t_2) \text{ まで動かす場合 } \int_{t_2}^{u(t_2)} \|S\vec{x}_0(\tau)\| d\tau = \int_{t_2}^{u(t_2)} \sqrt{\dot{\vec{x}}_0(\tau)^T S^T S \dot{\vec{x}}_0(\tau)} d\tau$$

$$= \int_{t_2}^{u(t_2)} \|\dot{\vec{x}}_0(\tau)\| d\tau \text{ であるから, } B \text{ の長さは, } A \text{ の長さに等しい. しかも}$$

$$A \cap B \supset \{ \vec{x}_0(t_2), \vec{x}_0(u(t_2)) \}. \text{ よ, 2. 5) より } A = B. \text{ さて } U = [t_2, t_2],$$

$$V = [0, \ell], \ell = f(t_2, t_2) (t_2 \equiv u(t_2)) \text{ とする. } \tilde{f}(t, t_2) : U \rightarrow V \text{ は, 全単射}$$

でその逆写像を  $\tilde{f}^{-1}$  とすると  $\tilde{f}^{-1} \in C^1$  級. ベクトル値関数  $\vec{x}_0 : U \rightarrow A$

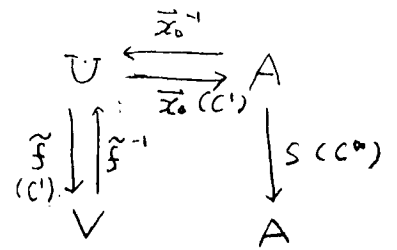
は全単射で  $C^1$  級なので, 逆写像  $\vec{x}_0^{-1} : A \rightarrow U$  は  $C^1$  級. よ, 2

$\vec{x}_0 \circ \tilde{f}^{-1} : V \rightarrow A$  は  $C^1$  級で全単射. 又写像  $S : A \rightarrow A$  は  $C^\infty$  級で

全単射. 図 C-1.

よって写像  $\gamma \equiv \tilde{f} \circ \tilde{x}_0^{-1} \circ S \circ \tilde{x}_0 \circ \tilde{f}^{-1}: V \rightarrow V$  は

$C'$ 級で全単射, 従って fixed point theorem



「 $\mathbb{R}^n$ における閉球から閉球への連続写像は

図 C-1

固定点を持つ」より, fixed point  $\bar{z}$  がある.  $\gamma(\bar{z}) = \bar{z}$ .

つまり  $\bar{z} = \tilde{f} \circ \tilde{x}_0^{-1} \circ S \circ \tilde{x}_0 \circ \tilde{f}^{-1}(\bar{z})$ , i.e.,  $\tilde{x}_0(\tilde{f}^{-1}(\bar{z})) = S \tilde{x}_0(\tilde{f}^{-1}(\bar{z}))$ .

$t_0 = \tilde{f}^{-1}(\bar{z})$  とおけば,  $\tilde{x}_0(t_0) = S \tilde{x}_0(t_0)$ . これは条件 5) に矛盾する.

従って  $t < t_1 < u(t) + \delta \Rightarrow u(t) < u(t_1)$ . 又  $t_1 < u(t) < u(t_1) + \delta$  となる  $\delta$ .

今, 証明 (E) により,  $u(t_1) < u(u(t)) = t + T$ . //

2.  $u(t_1) < u(t_2)$  for  $\forall t_1, t_2 \in (t, u(t))$  s.t.  $t_1 < t_2$ .

$t < t_1 < t_2 < u(t)$  であるから 1. より

$$u(t) < u(t_1) < t + T \quad i=1, 2$$

つまり  $t_1 < t_2 < u(t_1)$ , 再び 1. より  $u(t_1) < u(t_2)$ . //

2. より  $\lim_{t \rightarrow t_0+0} u(t) = u_+(t_0)$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0-0} u(t) = u_-(t_0)$  がある. //

ところで  $\tilde{x}_0(t)$ ,  $S \tilde{x}_0(t)$  は  $t$  の関数として連続だから,



$$\lim_{t \rightarrow t_0 \pm 0} S \vec{x}_0(t) = S \vec{x}_0(t_0) - \vec{x}_0(u(t_0)) = \lim_{t \rightarrow t_0 \pm 0} \vec{x}_0(u(t)) = \vec{x}_0(u_{\pm}(t_0))$$

又、 $t_0 < u_{\pm}(t_0) < t_0 + T$  であり、かつ 5) であるから、 $u(t_0) = u_{\pm}(t_0)$ , i.e.,

$u(t)$  は連続。

次に、微分可能性を証明する。 $\dot{\vec{x}}_0(u(t)) \neq 0$  であるから、例えは"x成分

$\dot{x}_{01}(u(t)) \neq 0$  とする。

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{h} = \frac{x_{01}(u(t+h)) - x_{01}(u(t))}{h} \cdot \left[ \frac{x_{01}(u(t+h)) - x_{01}(u(t))}{u(t+h) - u(t)} \right]^{-1}$$

$$h \rightarrow 0 \text{ のとき } \rightarrow S \dot{x}_{01}(t) \frac{1}{\dot{x}_{01}(t)}$$

よって  $\frac{d}{dt} u(t)$  は存在して連続, i.e.,  $u(t)$  は  $C^1$  系。

又、及び  $u^2(t) = t + T$  より  $\frac{d}{dt} u(t) > 0$  もわかる。

D.  $n_i = r_i + L(x_0 + \alpha' f_2, x_0)$  の証明<sup>\*</sup>

$\vec{x}_0$  と,  $\vec{x}_0 + \alpha' \vec{f}_2$  及び  $\vec{x}_0 + \alpha' \vec{v}$  の軌道をそれぞれ, 1.  $\longrightarrow$ , 2.  $\dashrightarrow$ , 3.  $\rightsquigarrow$  で表すと (必要な軌道をその相対位置を変えたいように移動して) 適当な方向からみることにより, 同時に3つの交差が生じないようにすることができ. 従って交差の種類は24通りあるが, そのうち  $\vec{x}_0$  が交差に関係しない8通り (例えば  $\rightsquigarrow \dashrightarrow$ ) は,  $n, r, L$  のいずれにも寄与しないので結局表 D-1 の18通りを考えればよい. 但し, 17, 18番目は  $\vec{x}_0$  自体の交差によるものであり, 適当に  $\vec{x}_0, \vec{x}_0 + \alpha' \vec{v}$  を変形することにより, この時に1~16の交差が生じないようにすることができ, 従って太い矢印は, 1, 2, 3の平行な任意の順序, を意味する. (例えば  $\rightsquigarrow \dashrightarrow$ ). 表 D-1 には,  $n, r, L$  への寄与も示してある. これらの個数をそれぞれ  $n_1, n_2, \dots, n_{18}$  とする. まず  $\alpha > 0$  を考える. 表より

$$\left. \begin{aligned} n &= n_1 + n_2 - n_3 - n_4 + n_{17} - n_{18} \\ L &= -n_{10} - n_{12} + n_{13} + n_{15} + n_{17} - n_{18} \end{aligned} \right\} (D.1)$$

\* ) 簡単のため以下では  $i$  を省く.

$$\left. \begin{aligned} 2r &= n_1 + n_2 - n_3 - n_4 - n_5 - n_6 + n_7 + n_8 + n_{10} + n_{12} \\ &\quad - n_{13} - n_{15} - (n_9 + n_{11} - n_{14} - n_{16}) \end{aligned} \right\} \quad (D.2)$$

軌道を反対の方向(裏側)からみよ。表D-1の図は3つある。

$$1 \leftrightarrow 8, 2 \leftrightarrow 7, 3 \leftrightarrow 6, 4 \leftrightarrow 5, 9 \leftrightarrow 15, 10 \leftrightarrow 16, 11 \leftrightarrow 13, 12 \leftrightarrow 14$$

と書く。17, 18はそのまま。従って、

$$\left. \begin{aligned} n &= n_8 + n_7 - n_6 - n_5 + n_{17} - n_{18} \\ L &= -n_{16} - n_{14} + n_{11} + n_9 + n_{17} - n_{18} \end{aligned} \right\} \quad (D.3)$$

となる。但し  $r$  は同じ表式でよい。(D.1), (D.3)より

$$\left. \begin{aligned} n_8 + n_7 - n_6 - n_5 &= n_1 + n_2 - n_3 - n_4 \\ -n_{16} - n_{14} + n_{11} + n_9 &= -n_{10} - n_{12} + n_{13} + n_{15} \end{aligned} \right\} \quad (D.4)$$

(D.4)を(D.2)に代入すると

$$2r = 2(n_1 + n_2 - n_3 - n_4) + 2(n_{10} + n_{12} - n_{13} - n_{14})$$

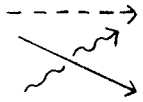
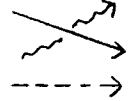
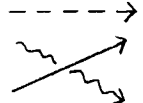
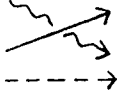



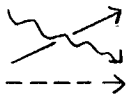
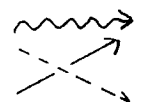


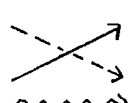
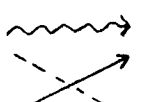
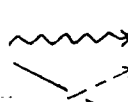
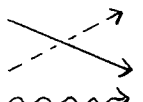
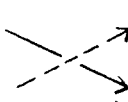


より(D.1)を使う。

$$\begin{aligned} r &= n_1 + n_2 - n_3 - n_4 + n_{10} + n_{12} - n_{13} - n_{14} \\ &= n - (n_{17} - n_{18}) + n_{17} - n_{18} - L = n - L \end{aligned}$$

つまり  $n = r + L$ 。

$\lambda < 0$  のときは  $\vec{x}_0 + 3\vec{v}$  は、周期  $2T$  での (D.1) の左辺 2,

$n \rightarrow 2n, L \rightarrow 2L, r \rightarrow 2r$  とおけばよい。従って  $n = r + L$ 。

番号	個数	type	$n$	$r$	$L$	番号	個数	type	$n$	$r$	$L$
1	$n_1$		1	$\frac{1}{2}$	0	2	$n_2$		1	$\frac{1}{2}$	0
3	$n_3$		-1	$-\frac{1}{2}$	0	4	$n_4$		-1	$-\frac{1}{2}$	0
5	$n_5$		0	$-\frac{1}{2}$	0	6	$n_6$		0	$-\frac{1}{2}$	0
7	$n_7$		0	$\frac{1}{2}$	0	8	$n_8$		0	$\frac{1}{2}$	0
9	$n_9$		0	$-\frac{1}{2}$	0	10	$n_{10}$		0	$\frac{1}{2}$	-1
11	$n_{11}$		0	$-\frac{1}{2}$	0	12	$n_{12}$		0	$\frac{1}{2}$	-1
13	$n_{13}$		0	$-\frac{1}{2}$	1	14	$n_{14}$		0	$\frac{1}{2}$	0
15	$n_{15}$		0	$-\frac{1}{2}$	1	16	$n_{16}$		0	$\frac{1}{2}$	0
17	$n_{17}$		1	0	1	18	$n_{18}$		-1	0	-1

- 1) H. Poincaré, 'Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste', Vol. III (1899). (「常微分方程式」, 英立)
- 2) E. N. Lorenz, J. Atmos. Sci. 20 (1963) 130.
- 3) M. L. Cartwright and J. E. Littlewood, J. London Math. Soc. 20 (1945) 180.
- 4) T.-Y. Li and J. A. Yorke, Amer. Math. Monthly 82 (1975), 985.
- 5) Y. Oono, Prog. Theor. Phys 59 (1978) 1028.
- 6) F. R. Marotto, J. Math. Anal. Appl. 63 (1978) 199.
- 7) Y. Oono and M. Oshikawa, Prog. Theor. Phys. 64 (1980) 54.

彼らによるカオスの定義は、次のとおりである。(同値な他の定義もある)。

「ある自然数  $m$  があって、 $f^m$  のもとで  $K(CI)$  が不変であり、

$K$  上のある同値関係  $\sim$  に対し、

$$f^* = C f^m C^{-1} . K/\sim \rightarrow K/\sim$$

が symbolic dynamics と conjugate であるとき、 $f$  は

カオティックである、という。ここに  $C: K/\sim \rightarrow K/\sim$  は

$K$  の元  $x$  に対して, その同値類を対応させる写像 (標準的全射)

8) M.V. Jakobson, Comm. Math. Phys. 81 (1981) 39.

9) S. Smale, Bull. A.M.S. 73 (1967) 447.

R. Bowen and D. Ruelle, Invent. Math. 29 (1975) 181.

D. Ruelle, Amer. J. Math. 98 (1976) 619.

10) V.I. Oseledec, Trans Moscow Math. Soc. 19 (1968) 197

11) M. Hénon, Comm. Math. Phys. 50 (1976) 69.

12) B.B. Mandelbrot, 'Fractal - Form, Chance and Dimension'

(Freeman, San Francisco, 1977)

13) J.C. Kaplan and J.A. Yorke, Lecture Notes in Math 730 (1979) 228

14) M.J. Feigenbaum, J. Stat. Phys. 19 (1978) 25.

15) B. Derrida, A Gervois and Y Pomeau, J. Phys. A 12 (1979) 269.

16) P. Collet, J.-P. Eckmann and H. Koch, J. Stat. Phys. 25 (1981) 1

17) M. J. Feigenbaum, Comm. Math. Phys. 77 (1980) 65.

18) H. Dado, Prog. Theor. Phys. 67 (1982) 1698

19) V. Croquette and C. Poitou, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 292 (1981) Série II-1353.

20) M. Griglio, S. Musazzi and U Perini, Phys. Rev. Letters 47 (1981) 243.

A Libchaber, C. Laroche and S Fauve, J. Physique L43 (1982) L-211.

21) 例えは J. M. Greene, R. S. Mackay, F Vivaldi and M. J. Feigenbaum,

Physica 3D (1981) 468

22) P Manneville and Y. Pomeau, Phys Letters 75A (1971) 1.

23) 例えは B. Hu and J. Rudnick Phys. Rev. Letters 48 (1982) 1645

及びその中の文献。外部ノイズを加えた場合も扱っている。

24) ランダウ-リフシッツ '流体力学1' 第3章, 東京図書.

25) D. Ruelle and F. Takens, Comm. Math. Phys. 20 (1971) 167.

S. Newhouse, D. Ruelle and F. Takens, Comm. Math. Phys. 64 (1978) 35.

26) A Itô, Prog. Theor. Phys 62 (1979) 620

27) J. P. Gollub and S. V. Benson, J. Fluid Mech. 100 (1980) 449.

J Maurer and A Libchaber, J Physique L41 (1980) L-515.

28) H. Yahata, Prog. Theor. Phys. 68 (1982) 1070 (常微分方程式系)

H. T. Moon, P Huerre and L. G Redekopp, Phys. Rev. Letters 49 (1982)

458. (偏微分方程式系)

29) D. G. Aronson, M. A. Chory, G. R. Hall and R. P. McGehee,

Comm. Math. Phys. 83 (1982) 303.

30) 例えば V. I. Arnol'd, Russian Math. Surveys 18 (1963) 85.

31) 例えば "アーノルド", アベズ "古典力学のエルゴード問題" 吉岡書店

32) B. V. Chirikov, Physics Reports 52 (1979) 263.

33) J. M. Greene, J. Math. Phys. 20 (1979) 1183.

L. P. Kadanoff, Phys. Rev. Letters 47 (1981) 1641.

S. J. Shenker and L. P. Kadanoff, J. Stat. Phys. 27 (1982) 631

34) M. J. Feigenbaum, L. P. Kadanoff and S. J. Shenker, Physica 50 (1982) 370.

D. Rand, S. Ostlund, J. Sethna and E. D. Siggia, Phys. Rev. Letters 49 (1982) 132.

35) C. Simó, J. Stat. Phys. 21 (1979) 465.

H. Dardo, Prog. Theor. Phys. 63 (1980) 1190

C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke, Phys. Rev. Letters 48 (1982) 1507.

36) Y. I. Frenkel and T. Kontorowa, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 8 (1938) 1340.

F. C. Frank and J. H. Van der Merwe, Proc. R. Soc. 198 (1949) 205, 216.

S. Aubry, in 'Solitons in condensed matter', ed A. Bishop and A. Schneider (Springer-Verlag, N.Y., 1979).



37) P. Bak, Phys. Rev. Letters 46 (1981) 791

W. Selke and M.E. Fisher, Phys. Rev. 20 (1979) 257

P. Bak and J von Boehm, Phys. Rev. B21 (1980) 5297.

M.E. Fisher and W Selke, Phys. Rev. Letters 44 (1980) 1502

38) S.R. McKay, A.N Berker and S. Kirkpatrick, Phys. Rev. Letters 48 (1982) 767.

39) S. Fishman, D.R. Grempel and R.E. Prange, Phys. Rev. Letters 49 (1982) 509.

40) M. Kohmoto, preprint.

41) K. Ikeda, H. Daido and O. Akimoto, Phys. Rev. Letters 45 (1980) 709.

K. Ikeda, K. Kondo and O. Akimoto, Phys. Rev. Letters 49 (1982) 1467.

42) J.D. Barrow, Phys. Rev. Letters 46 (1981) 963.

J.D. Barrow, Physics Reports 85 (1982) 1.

43) 例えは、G.M. Zaslavsky, Phys. Reports 80 (1981) 157.

及びその中の文献。

44) T. Høegh and B.A. Huberman, Phys. Rev. Letters 48 (1982) 711

45) A. Zippelius and M. Lücke, J. of Stat. Phys. 24 (1981) 345

46) J.P. Crutchfield and B.A. Huberman, Phys. Letters 77A (1980) 407.

- 47) J. Crutchfield, M. Nauenberg and J. Rudnick, Phys. Rev. Letters 46 (1981) 933.  
B. Shraiman, C. E. Wayne and P. C. Martin, Phys. Rev. Letters 46 (1981) 935.
- 48) M. Lücke and Y. Saito, Phys. Letters 91A (1982) 205
- 49) K. Matsumoto, private communication
- 50) Y. Aizawa and T. Uezu, Prog. Theor. Phys. 68 (1982) 1864.
- 51) J. S. Binman and R. F. Williams, preprint, knotted periodic orbits  
in dynamical systems I, II.
- 52) 第 I 章 の 分, T. Uezu and Y. Aizawa, Prog. Theor. Phys. 68 (1982) 1543.  
第 II 章 の 分 ; Y. Aizawa and T. Uezu, Prog. Theor. Phys. Lett 67 (1982) 982.  
T. Uezu and Y. Aizawa, Prog. Theor. Phys. 68 (1982) 1907.  
T. Uezu, Phys. Letters 93A (1983) 161.
- 53) K. Tomita and T. Kai, Suppl. Progr. Theor. Phys. 64 (1978) 280.
- 54) J. L. Kaplan and J. A. Yorke, Comm. Math. Phys. 67 (1979), 93.
- 55) R. H. G. Helleman, 'Fundamental Problems in Statistical Mechanics,  
vol. 5', ed. E. G. D. Cohen (North Holland Publ. Amsterdam and N. Y., 1989), 165.

56) R.H. Crowell and R.H. Fox, 'Introduction to Knot Theory' (Springer-Verlag  
N.Y. 1977)

D. Rolfsen, Knots and Links (Publish or Perish Inc., Berkeley, 1976).

57) O.E. Rössler, Bull. Math. Bio 39 (1977) 275

58) O.E. Rössler, Phys. Letters 57A (1976) 397.

59) K. Tomita and I. Tsuda, Suppl. Progr. Theor. Phys. 69 (1980) 185.

60) B. Duplantier, Comm. Math. Phys. 85 (1982) 221